

# УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ВУЗОВ

СПЕЦИАЛЬНОСТЬ



# ОСНОВЫ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА



Б. И. Крук  
О. Б. Журавлева

Б. И. Крук, О. Б. Журавлева

# ОСНОВЫ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

*Рекомендовано УМО по образованию в области  
Инфокоммуникационных технологий и систем связи  
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных  
заведений, обучающихся по направлению подготовки  
210700 – «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»  
квалификации (степени) «бакалавр»  
и квалификации (степени) «магистр»*

**Москва  
Горячая линия - Телеком  
2013**

УДК 621.3.01:621.372(075.8)

ББК 32.84

К84

Рецензенты: доктор техн. наук, профессор *О. В. Горячкин*, канд. техн. наук, доцент *С. Г. Гриненко*, доктор техн. наук, профессор *В. П. Шувалов*

**Крук Б. И., Журавлева О. Б.**

**К84** Основы спектрального анализа. Учебное пособие для вузов. – М.: Горячая линия–Телеком, 2013. – 148 с., ил.

**ISBN 978-5-9912-0327-2.**

Изложены основы теории спектрального анализа периодических, непериодических (непрерывных и импульсных), дискретных и модулированных сигналов, применяемых в радиоэлектронике и связи.

Для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров и магистров 210700 – «Инфокоммуникационные технологии и системы связи».

**ББК 32.84**

*Адрес издательства в Интернет [WWW.TECHBOOK.RU](http://WWW.TECHBOOK.RU)*

*Учебное издание*

**Крук Борис Иванович  
Журавлева Ольга Борисовна**

**Основы спектрального анализа**

Учебное пособие

Компьютерная верстка *Н. М. Гусельниковой*

Обложка художника *О. Г. Карповой*

Подписано в печать 16.02.2013. Формат 60×88/16. Уч. изд. л. 9,25. Тир. 500 экз. (1-й завод 200 экз.)

**ISBN 978-5-9912-0327-2**

© О. Б. Журавлева, Б. И. Крук, 2013

© Издательство «Горячая линия–Телеком», 2013

## Предисловие

Спектральный анализ сигналов является, пожалуй, одним из наиболее увлекательных разделов теории электрических цепей. Базируясь на строгих математических основаниях, выявленных еще в позапрошлом веке французским ученым Ж. Фурье, он дает в руки инженеров мощный аппарат анализа процессов, происходящих при передаче информации по линиям связи.

В то же время зачастую излишняя «математизация» изложения данного материала в учебниках сталкивает обучаемого с определенными трудностями при его усвоении. Поэтому вполне понятно стремление авторов этого труда собрать все основные сведения о спектрах в одно пособие, изложить их максимально доступно, не поступаясь при этом математической строгостью и вдохнуть идущий от инженерной практики физический смысл в сухие формулы и графики.

Конечно же, никакое детальное описание теоретического материала не заменит живых примеров. Следуя этому правилу, авторы старались насыщать материал книги большим количеством примеров и задач, дающих возможность проверить теорию на практике.

Насколько авторам удалось воплотить свои идеи, судить читателям. Отзывы и пожелания на книгу следует отправлять по адресу: Россия, 630102, Новосибирск, ул. Кирова 86, СибГУТИ, кафедра ТЭЦ или по E-mail: [krouk@sibsutis.ru](mailto:krouk@sibsutis.ru) и [zhuravlcva@ncic.nsk.su](mailto:zhuravlcva@ncic.nsk.su).

# 1. Физические основы спектрального анализа

---

---

Спектральный анализ электромагнитных колебаний был открыт почти 150 лет назад ...

В середине позапрошлого века в небольшом немецком городе, профессор химии Роберт Бунзен (1811–1899) изобрел горелку, в которую снизу по трубке поступал газ. Стоило только поднести спичку к верхнему концу трубки, и под горелкой вспыхивало пламя высокой температуры. Сейчас эта горелка называется бунзеновской. Профессор вносил в пламя горелки различные вещества и по цвету пламени определял его химический состав. Но так как разные вещества могли окрасить пламя в один и тот же цвет, Бунзен уже собирался бросить эту затею. Выручила случайность. Как-то во время опыта к Бунзену зашел его коллега по университету профессор физики Густав Кирхгоф (1824–1887). Он принес с собой ящик с линзами и стеклянной призмой, который называл спектроскопом.

Сейчас каждый школьник знает принцип действия спектроскопа. Если, например, пропустить солнечный свет через призму, то получим цветные полосы (помните, как знакомая со школьной скамьи фраза: «Каждый охотник желает знать, где сидит фазан» помогала легко запомнить, на какие цвета разлагается белый свет – красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий и фиолетовый!). Набор цветов, на которые разлагается солнечный свет, называется его спектром. Заметим, что луч какого-либо цвета – это электромагнитное колебание со строго определенной частотой. Другой цвет – другая частота колебания. Таким образом, солнечный свет представляет собой сумму простейших электромагнитных колебаний с различными частотами.

Вернемся к опытам Бунзена и Кирхгофа. Когда почтенные профессора решили пропустить окрашенное пламя через линзы и призму, они увидели на стенке ящика разноцветные линии. И каждое вещество, сгорая в пламени горелки, давало на экране только свои линии, не похожие на линии других веществ. Так был открыт спектральный анализ веществ. По календарю шел 1859 год.

Любопытна история открытия газа гелия методом спектрального анализа. Спустя почти десять лет после опытов Бунзена и Кирхгофа, 18

августа 1868 г., в индийский городок Гунтар прислал французский астроном Жюль Жансен. Сюда съехались многие ученые наблюдать полное солнечное затмение. Жансен захватил с собой спектроскоп. Направив его на светило, он увидел разноцветные линии – спектр плазмы, которую извергает Солнце. Одна линия оказалась неизвестной: ни одно из известных веществ на Земле не имело ее в своем спектре. Значит, открыто новое вещество! На Земле оно неизвестно, поэтому назвали его гелием – «солнечным веществом» (по-гречески «солнце» – «Гелиос»). Через два месяца, ничего не зная об открытии Жансена, английский астроном Норман Локвер повторил его.

После этого открытия прошло еще 27 лет. И вот английский химик Уильям Рамзай обнаружил в минерале клевета неизвестный газ. Поместив его в трубочку и подав высокое напряжение, Рамзай превратил газ в плазму и стал исследовать свет плазмы. Оказалось, что неизвестный газ был гелием. Налицо один из парадоксов науки – сначала газ был найден за 150 млн. км от нашей планеты, а уже потом, спустя много лет, обнаружен на Земле.

Электромагнитные колебания и волны используются для различных видов связи

В одной из популярных книг для объяснения связи между электричеством, радиоволнами, светом и квантовой механикой предлагается, призвав на помощь воображение, проделать такой опыт: зажать в тиски пластмассовую линейку, потереть ее выступающий конец кошачьей шкуркой (чтобы вызвать электростатический заряд) и затем придать ей колебательные движения, меняя частоту, т.е. число колебаний в секунду. Так как всякое колебательное движение электрического заряда порождает электромагнитные волны той же частоты, что и движение, то наша линейка станет излучателем электромагнитных волн.

Начнем с частоты колебаний 50 Гц. С такой частотой подается переменный ток в наши квартиры. Именно им питаются бытовые электроприборы. Далее следуют частоты в сотни и тысячи герц, с которыми переменные токи переносят телеграммы, факсы, речь в городских и междугородных кабелях связи. Затем поднимаемся в диапазон частот до миллионов герц (мегагерц). Здесь мы попадаем в мир радиоволн. На них ведут передачи радиовещательные станции. При 100 МГц мы попадаем в область цифрового кабельного телевидения, а при 10 000 МГц (10 ГГц) – в область радиолокации. В диапазоне 430...700 ГГц нас встречают цвета радуги: мы попадаем в область видимых электромагнитных волн, проще говоря – света. Увеличивая частоты колебаний, мы оказываемся в области рентгеновских и гамма-лучей. Это диапазон частот  $10^{18}$  и

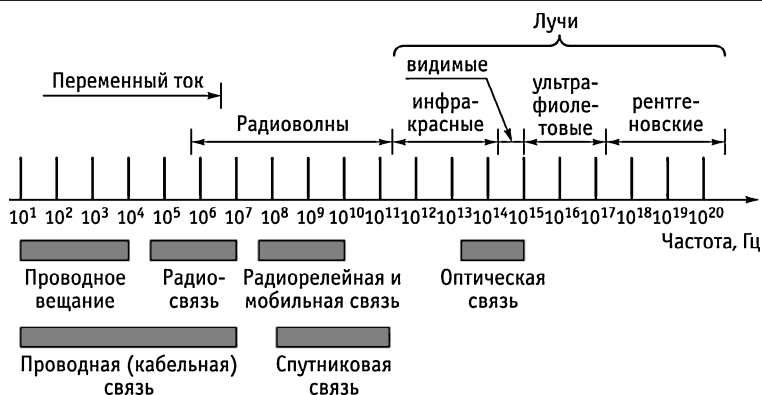


Рис. 1.1. Использование шкалы частот в электросвязи

$10^{21} \dots 10^{24}$  Гц. За ними следуют самые высокочастотные из известных нам волн – космические лучи. Они приходят к нам из таинственных глубин Вселенной.

Как видим, и электричество, и радиоволны, и свет, и рентгеновское излучение, и гамма-частицы – все они одной природы. Только разные частоты отличают их и придают им «индивидуальность».

Из рис. 1.1 видно использование шкалы частот и волн различных типов для различных видов связи.

Изучение спектров удобнее начинать с колебания струны

Вы тронули струну, она стала вибрировать и своим движением то сжимать, то разряжать окружающий воздух или, другими словами, то повышать, то понижать его давление. Слои воздуха повышенного и пониженного давления начали разбегаться во все стороны от колеблющегося тела. Образовалась звуковая волна. Нечто похожее наблюдаем, когда бросаем камни в воду и смотрим на расходящиеся кругами волны. Гребни этих волн можно сравнить с областью сжатого воздуха, впадины – с областью разреженного воздуха.

Попробуем поставить на пути звуковой волны пластину и непрерывно измерять давление, оказываемое на нее волной. При приближении области сжатого воздуха к пластине давление на нее увеличивается по сравнению с атмосферным. Но вот степень сжатия воздуха постепенно уменьшается – это к пластине подходит область разреженного воздуха. Давление на пластину становится меньше атмосферного. Построив график изменения со временем звукового давления на пластину (рис. 1.2), обнаруживаем, что на бумаге будет вычерчена синусоида (мы



Рис. 1.2. Закон изменения звукового давления колеблющейся струны

условно предполагаем, что колебания струны не затухают). В секунду струна может совершать не одно–два, а десятки и сотни колебаний. Например, самая толстая (басовая) струна рояля, обладающая самым низким звуком, колеблется при ударе на клавишу с частотой 27 Гц. Струны гитары издают более высокие звуки, они совершают колебания с частотами от 144 Гц (самая толстая струна) до 576 Гц (самая тонкая струна). Заметим, что наиболее высокую частоту колебаний звука в оркестре (9000 Гц) имеет флейта-пикколо.

Интересен случай, когда звуковые волны излучают две одновременно колеблющиеся струны. На рис. 1.3 показаны три варианта: вторая струна колеблется в 2 (а), 3 (б) и 10 (в) раз чаще, чем первая. Давления двух звуковых волн на пластину, помещенную на их пути, складываются. График результирующего давления уже не является синусоидой. Мы видим, что быстрые изменения в этой кривой обусловлены более высокочастотным колебанием (в данном случае колебанием второй струны).

До сих пор мы намеренно упрощали задачу, когда считали, что давление звуковой волны, создаваемой струной, изменяется по закону синусоиды. На самом деле это не так. График колебания реальной струны, а следовательно, график звукового давления отличается от синусоиды. Дело в том, что всякое вибрирующее тело создает одновременно звуки нескольких частот или, как говорят, тонов. Самый низкий из них называют основным током, более высокие тоны, сопровождающие основной, – обертонами. При звучании гитары, скрипки, рояля всегда слышны кроме основного тона дополнительные призвуки, т.е. обертоны. Так, если принять частоту основного тона (синусоидальное колебание) равной 20 Гц, то частоты обертонов (тоже синусоидальные колебания) составят: первого – 40 Гц; второго – 60 Гц; третьего – 80 Гц и т.д., а, скажем, девятого обертона – 200 Гц. В совместном звучании основной тон и обертоны создают соответствующую окраску звука, или тембр. Один тембр отличается от другого числом и силой обертонов.



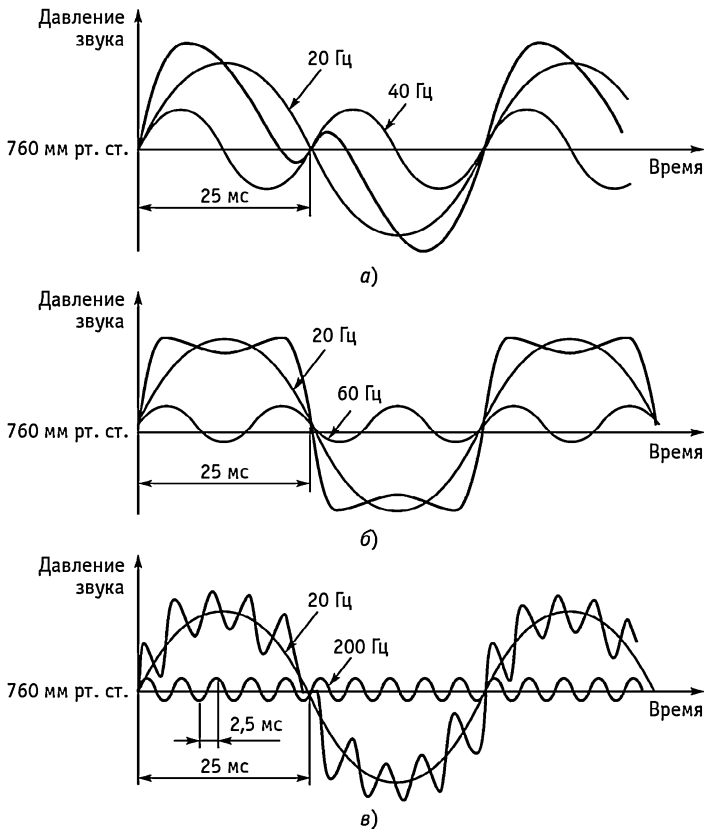


Рис. 1.3. Кривые звукового давления при различных частотах колебания струн

Таким образом, для получения формы кривой звукового давления, создаваемого колеблющейся струной гитары или скрипки, нужно сложить синусоидальные кривые звуковых давлений основного тона и обертонов. Подобная операция была проделана на рис. 1.3, когда рассматривали одновременные колебания двух струн. Только в данном случае из-за наличия большого числа обертонов форма результирующей кривой будет еще сложнее, т.е. еще сильнее отличаться от синусоидальной.

Речевые (телефонные) сигналы содержат в своем спектре основные тоны и обильное количество обертонов

Графики давления звуковых волн, создаваемых человеческим голосом, имеют еще более сложную форму, чем те же графики для колеблющихся струн.

Воздух, выходя из легких человека, заставляет вибрировать голосовые связки. От них колебание воздуха передается через гортань голосовому аппарату, заканчивающемуся ротовой и носовой полостями.

Последние выполняют роль резонаторов – они усиливают колебание воздуха, подобно тому как полый корпус гитары или скрипки, также являясь резонатором, усиливает звуки струн. Колебания воздуха из голосового аппарата человека передаются окружающему воздуху. Возникает звуковая волна. Характер издаваемого звука определяется натяжением голосовых связок, формой ротовой полости, положением языка, губ и т.д.

Из описания голосового аппарата человека нетрудно понять, что голосовые связки играют роль своеобразных струн, они создают основной тон и обильное количество обертонов. Частота основного тона речи лежит в пределах от 50...80 Гц (очень низкий голос – бас) до 200...250 Гц (женский и детский голоса). При разговоре частота основного тона меняется в значительных пределах, особенно при переходе от гласных звуков к согласным и наоборот.

В совместном звучании основной тон и обертоны создают соответствующую окраску звука или тембр. Один тембр отличается от другого числом и силой обертонов. При преобладании в человеческом голосе высоких обертонов над низкими мы слышим в нем «звучание металла». Люди, у которых в голосе преобладают низкие обертоны, говорят мягким, бархатным голосом.

Для получения формы кривой звукового давления, создаваемого речью человека, нужно сложить синусоидальные кривые основного тона и обертонов. Из-за наличия большого числа обертонов форма результирующей кривой будет сложной. На рис. 1.4 показано, какое давление создает звук «а», произнесенный мужским голосом с частотой основного тона 200 Гц (период основного тона 5 мс). Для передачи звука на расстояние он в телефонном аппарате превращается в сигнал. Для этой цели служит микрофон.

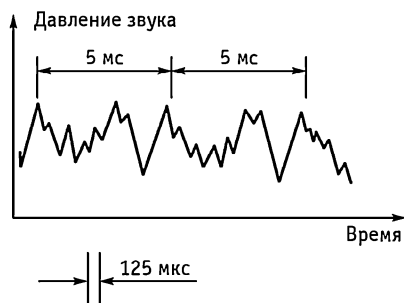


Рис. 1.4. Кривая звукового давления при произнесении звука «а» мужским голосом

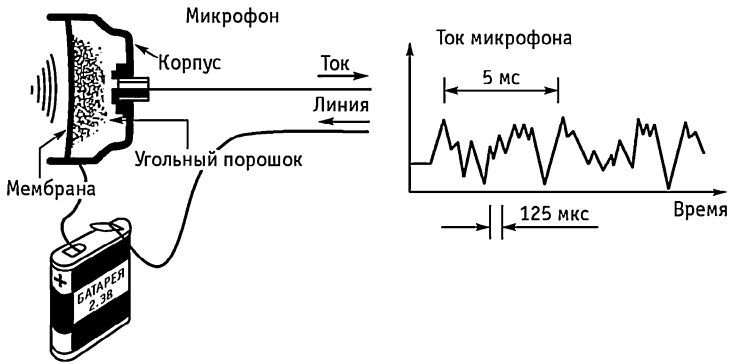


Рис. 1.5. Превращение звука в электрический сигнал с помощью микрофона

Телефон был изобретен А.Г. Беллом, учителем в школе глухонемых в американском городе Бостоне в 1876 г. С тех пор в его конструкцию было внесено много усовершенствований. В частности, в современном телефоне используется чувствительный угольный микрофон (рис. 1.5). В нем мембрана соприкасается с угольным порошком. Пока в микрофон не говорят, сопротивление порошка остается неизменным и через него от батареи в линию (провода) протекает постоянный ток. Стоит произнести в микрофон какое-нибудь слово, порошок под действием колеблющейся мембраны будет то спрессовываться, то разрыхляться. Изменение плотности порошка приводит к изменению его электрического сопротивления, а значит, и к изменению тока, текущего через порошок. В проводах, идущих от микрофона, рождается электрический ток, повторяющий форму звукового давления.

Изучение речи показывает, что речь – это процесс, частотный спектр которого находится в пределах от 50...100 до 8000...10 000 Гц. Установлено однако, что качество речи остается вполне удовлетворительным, если ограничить спектр снизу и сверху частотами 300 и 3400 Гц. Эти частоты приняты Международным союзом электросвязи (МСЭ) в качестве границ эффективного спектра речи. При указанной полосе частот сохраняется хорошая разборчивость речи и удовлетворительная натуральность ее звучания.

На рис. 1.6 показан спектр речи. Как видно из рисунка, некоторые частотные составляющие речи усилены, а другие ослаблены. Усиленные области спектра частот называются *формантами*. Звуки речи различных людей отличаются числом формант и их расположением в частотном спектре. Отдельные звуки могут иметь до шести формант, из которых только одна или две являются определяющими. Они обязательно находятся в диапазоне частот 300...3400 Гц. Между формантами лежат менее мощные составляющие звуковых частот. Однако именно они придают голосу каждого человека индивидуальность, позволяющую узнавать говорящего.



Рис. 1.6. Спектр человеческой речи

Источниками звука при передаче программ вещания обычно являются музыкальные инструменты или голос человека. Формирование сигналов звукового вещания и их прием осуществляется так же, как и телефонных сигналов. Используются лишь другие типы микрофонов.

Спектр звукового сигнала занимает полосу частот 20...20 000 Гц. Однако в зависимости от требований к качеству воспроизведения ширина спектра сигнала вещания может быть ограничена. Для достаточно высокого качества (каналы вещания первого класса) полоса частот должна составлять 50...10 000 Гц, для безукоризненного воспроизведения программ вещания (каналы высшего класса) – 30...15 000 Гц.

Спектр факсимильного сигнала зависит от скорости развертки изображения и размеров светового пятна считывающего устройства

**Факсимильные сигналы.** Обратите внимание на то, как вы читаете книгу. Ваши глаза скользят по строке слева направо, затем вы переходите к началу другой строки и т.д. до конца страницы. Словом вы «просматриваете» все элементы строки последовательно. Можно сказать, что при чтении книги происходит построчная развертка текстового изображения.

Именно по такому принципу «просматривается» изображение в современных факсимильных аппаратах, предназначенных для передачи на расстоянии различного рода неподвижных изображений (документов, чертежей, рисунков, фотографий). Для этого с помощью источника света и системы оптических линз формируют световое пятно так, чтобы освещать на передаваемом изображении площадку размером, скажем,  $0,2 \times 0,2$  мм. Это световое пятно перемещается сначала вдоль одной строки, затем переходит на другую и движется по ней – и так до конца последней строки. Свет, отражаясь от каждой элементарной площадки, попадает на фотозадачник и вызывает в его цепи ток (рис. 1.7). Значение

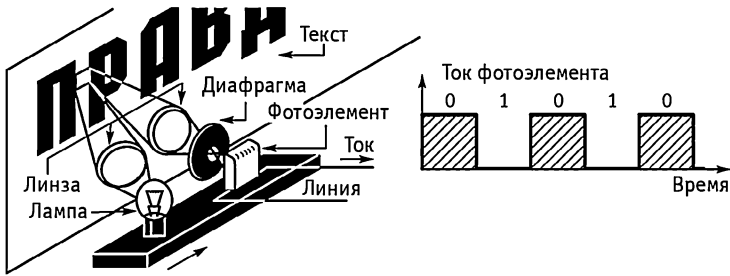


Рис. 1.7. Преобразование изображения в электрический сигнал в факсимильном аппарате

этого тока зависит от яркости отраженного света, а последняя – от яркости освещенной площадки. Таким образом, при переходе светового пятна на изображении от одной элементарной площадки к другой ток в цепи фотоэлемента меняется пропорционально яркости площадок: мы получаем точную электрическую копию изображения.

Рассмотрим изображение, состоящее только из двух цветов: черного и белого, например, страницу книги, какой-либо чертеж и т.п. Очевидно, каждый элемент изображения (напомним, что размером он всего  $0,2 \times 0,2$  мм) будет представлять собой либо черную, либо белую площадку, напоминая чередованием шахматную доску. Черные площадки практически полностью поглощают падающий на них свет. Яркость отраженного ими света при этом настолько ничтожна, что при просмотре черных площадок ток в цепи фотоэлемента не возникает. Наоборот, площадки белого цвета почти полностью отражают падающий на них свет, и при попадании на них светового луча ток в цепи фотоэлемента скачком принимает максимальное значение. Таким образом, перемещая световое пятно, а вслед за ним и фотоэлемент вдоль каждой строки изображения, получаем на выходе фотоэлемента последовательность импульсов (рис. 1.7).

При таком «шахматном» чередовании элементов изображения спектр факсимильного сигнала будет шире, чем для любого другого изображения, поскольку круче фронтов импульсов, чем у прямоугольных, не бывает.

Ширина спектра факсимильного сигнала зависит от скорости развертки изображения и размеров светового пятна.

**Пример 1.1** На стандартном листе бумаги формата А4 в строке помещается примерно 1000 черно-белых элементов изображения при ширине пятна 0,2 мм. Если в факсимильном аппарате скорость развертки составляет 60 строк/мин, т.е. каждая строка считывается за 1 с, то за эту секунду 500 раз будет осуществлен переход с черного на белое, или наоборот. Это означает, что максимальная частота чередования импульсов

равна 500 Гц. При ширине светового пятна 0,1 мм в строке будет в 2 раза больше элементов изображения, и максимальная частота чередования импульсов повысится до 1000 Гц.

Так как для сохранения хорошей степени «прямоугольности» импульсов нужно передавать кроме основной гармоники еще и несколько высших, то ширина спектра факсимильного сигнала может простираться до 1,5...3,0 кГц.

При увеличении скорости развертки изображения черные и белые площадки будут считываться чаще и, следовательно, спектр факсимильного сигнала будет шире. При передаче изображений с полутонами получается сигнал сложной формы, спектр которого является непрерывным и соединяет все частоты от нуля до максимальной.

Факсимильная связь широко используется для передачи газетных полос (т.е. их изображений) в пункты централизованного печатания. Для передачи газет используют специальные высокоскоростные факсимильные аппараты с шириной светового пятна 0,05 мм. Повышенная скорость развертки позволяет передавать одну газетную полосу за 2–3 минуты. Это приводит к расширению спектра факсимильного сигнала до 180 кГц.

Практически мгновенная развертка телевизионного изображения и малая «площадь» электронного луча позволяют видеть «живую» картинку, но в то же время требуют для передачи телевизионных сигналов широкого частотного диапазона

Любое подвижное изображение – это, как правило, смена через каждые 40 мс одного неподвижного изображения другим (25 кадров в 1 с). За время между сменой кадров нужно успеть просмотреть все неподвижное изображение, которое содержит полмиллиона элементарных площадок или элементов изображения (625 строк по 833 элемента в строке). Значит, каждый элемент изображения придется рассматривать в течение одной полумиллионной доли от отведенных на весь кадр 40 мс. Это непостижимо короткий отрезок времени – всего две десятимиллиардных доли секунды! Ясно, что ни одно механическое устройство не способно перемещать световое пятно и фотоэлемент по строкам изображения с такой скоростью.

Вы никогда не задумывались над тем, что вы видите на экране телевизора, когда усаживаетесь перед ним в свободный вечер? Изображение? Нет, в действительности на экране никакого изображения нет, абсолютно никакого! Если бы мы сумели открыть глаза на какую-то

ничтожную долю секунды (а речь идет о миллионных и даже миллиардных долях), то увидели бы на экране всего одну светящуюся точку. Это она бежит с невероятной скоростью по экрану, оставляя в нашем глазу след (мы видим то, чего уже нет, еще в течение 0,1 с), изменяющийся по яркости.

Что же заставляет светящуюся точку перемещаться с такой головокружительной быстротой? Электронный луч. Это он способен почти мгновенно отклоняться под действием изменяющегося магнитного поля и развертывать «картинки». Это его можно очень точно сфокусировать с помощью специальных электрических «линз». Первые опыты с электронным лучом начались в самом начале XX в. Еще в 1907 г. профессор Петербургского технологического института Б.Л. Розинг сконструировал первую электронно-лучевую трубку и получил на ней изображение, правда, невысокого качества. Изобретение в начале 30-х годов этого столетия первых качественных передающих трубок связано с именами советских ученых, пионеров отечественного телевидения С.И. Катаева и П.И. Шамова.

Как бы не отличались конструкции передающих телевизионных трубок разных лет, все они в чем-то имитируют глаз. Роль хрусталика выполняет объектив, роль зрачка – диафрагма. Имеется в трубке и своя «сетчатка» – пластинка, напоминающая пчелиные соты, в ячейках которых располагаются микроскопические фотоэлементы. Конечно, их намного меньше, чем фоторецепторов в глазу: всего около 0,5 млн. Изображение, которое нужно превратить в серию электрических импульсов, проектируется с помощью объектива на эту искусственную «сетчатку». Каждый микроскопический фотоэлемент (представляющий собой капельку светочувствительного серебряно-цезиевого сплава) получает свою порцию света и, если его подключить к внешней цепи, создаст ток, пропорциональный освещенности. Что касается электронного луча, то он как раз и подключается поочередно каждый из 500 000 фотоэлементов к внешней цепи трубки, причем отводится ему на это всего 40 мс, пока не сменится кадр. Таким образом, на одном элементе изображения луч «задерживается» не более 80 миллиардных долей секунды (т.е. 80 нс). Величина тока во внешней цепи трубки отражает в каждый момент времени яркость соответствующего элемента изображения, спроектированного объективом на «сетчатку» передающей трубки, и является точной электронной копией передаваемого изображения.

**Пример 1.2** Подсчитаем ширину спектра телевизионного сигнала. Пусть и на этот раз чередуются черные и белые площадки (элементы). Всего таких элементов будет  $625 \text{ строк} \times 833 \text{ элемента} = 520\,625$ . В секунду меняется 25 кадров, т.е.  $25 \times 520\,625 = 133\,015\,625$  элементов. Значит переход с черного на белое, или наоборот, происходит примерно 6 500 000 раз в 1 с. Максимальная частота повторения им-

пульсов равна 6,5 мГц, что и принято за верхнюю границу ширины спектра телевизионного сигнала. Нижней границей считают 50 Гц (нижняя граница сигнала звукового сопровождения).

Во время смены строк и кадров развертывающий луч приемной трубки должен быть погашен. Кроме того, необходимо синхронизировать лучи приемной и передающей трубок. Таким образом, кроме сигнала изображения необходимо передавать вспомогательные управляющие импульсы (гасящие и синхронизирующие). Электрический сигнал, включающий в себя сигнал изображения и управляющие импульсы, называется полным телевизионным сигналом.

В системах цветного телевидения передается изображение расчленяется с помощью светофильтров на три одноцветных изображения – красное, зеленое и синее. Красные, зеленые и синие лучи попадают каждый на свою телевизионную трубку. В приемном устройстве путем сложения трех одноцветных изображений воспроизводится передаваемое цветное изображение.

Таким образом, спектр телевизионного сигнала простирается от 50 Гц до 6,5 мГц.

Сигналы, вырабатываемые телеграфным аппаратом и ЭВМ – это случайные последовательности прямоугольных импульсов. Чем выше скорость передачи сигналов, тем больший диапазон частот они занимают

Все рассматриваемые до сих пор сообщения и сигналы являются непрерывными. Сообщения и сигналы телеграфии и передачи данных между ЭВМ относятся к дискретным.

Устройства преобразования телеграфных сообщений и компьютерных данных в электрический сигнал представляют каждый знак сообщения (букву, цифру) в виде определенной комбинации импульсов и пауз одинаковой длительности. Импульс соответствует наличию тока на выходе устройства преобразования (например, телеграфного аппарата), пауза – отсутствию тока.

В телеграфии таблица, которая ставит в соответствие буквам, цифрам и другим знакам комбинации импульсов и пауз, называется *телеграфным кодом*. Если обозначить импульс через 1, а паузу через 0 и воспользоваться международным телеграфным кодом МТК-2, то можно, например, знак А записать в виде 11000, знак В – в виде 10011 и т.д.

Для передачи компьютерных данных используют более сложные коды, которые позволяют обнаруживать и исправлять ошибки в принятой комбинации импульсов, возникающие от действия помех.



Устройства преобразования сигналов телеграфии и компьютерных данных в сообщения по принятым комбинациям импульсов и пауз восстанавливают в соответствии с таблицей кода знаки сообщения (буквы, цифры и др.) и выдают их на печатающее устройство либо на экран дисплея.

Заметим, что чем меньше длительность импульсов, отображающих сообщения, тем больше их будет передано в единицу времени. Величина, обратная длительности импульса, называется скоростью телеграфирования:  $B = 1/\tau_n$ , где  $\tau_n$  – длительность импульса, с.

При длительности импульса  $\tau_n = 1$  с скорость  $B = 1$  импульс (или бит) в секунду. В телеграфии используются импульсы длительностью 0,02 с, что соответствует стандартной скорости телеграфирования 50 бит/с. Применяются и другие скорости телеграфирования (например, 75 бит/с). Скорости передачи компьютерных данных существенно выше. С помощью модемов, встроенных в компьютер, можно подключаться к всемирной сети Internet со скоростью передачи компьютерных данных 56 000 бит в секунду (или 56 килобит в секунду).

По магистральным каналам компьютерных сетей данные могут передаваться со скоростями, равными сотням миллионов бит в секунду (или сотням мегабит в секунду).

При передаче двоичных сигналов (т.е. 0 и 1) нет необходимости восстанавливать в приемнике импульсы без искажений, т.е. сохранять их форму; для восстановления информации достаточно зафиксировать только знак импульса при двуполярном сигнале либо наличие или отсутствие при однополярном сигнале. Расчеты показывают, что импульсы можно уверенно зафиксировать, если для их передачи используется ширина полосы частот, численно равная скорости передачи в бит/с. Так, для стандартной скорости телеграфирования 50 бит/с ширина спектра телеграфного сигнала составит 50 Гц. При скорости 56 килобит в секунду (стандартный компьютерный модем) ширина спектра сигнала составляет 56 кГц.

Для удобства спектры основных сигналов электросвязи сведены в табл. 1.1. Даже беглый взгляд на табл. 1.1 позволяет понять, что для передачи разных видов сигналов требуется различная ширина полосы пропускания системы электросвязи.

Таблица 1.1. Ширина спектров сигналов электросвязи

Вид сигнала	Ширина спектра, Гц
Телеграфный	0...100
Факсимильный при скорости 120 мин <sup>-1</sup>	0...1465
Телефонный	300...3400
Звукового вещания	50...10 000
Передачи данных от ЭВМ со скоростью 56 кбит/с	0...56 000
Факсимильный при передаче газет	0...180 000
Телевизионный	50...6 000 000

Передача сигналов с разной шириной спектра осуществляется по различным линиям связи; при этом спектр сигнала преобразуется путем модуляции сигнала

Перенос сигнала из одной точки пространства в другую осуществляет *система электросвязи*. Электрический сигнал является, по сути, формой представления сообщения для передачи его системой электросвязи.

Источник сообщения (рис. 1.8) формирует сообщение, которое с помощью специальных устройств преобразуется в электрический сигнал. При передаче речи такое преобразование выполняет микрофон, при передаче изображения – электронно-лучевая трубка, при передаче телеграммы – передающая часть телеграфного аппарата.

Доставленный в пункт приема сигнал должен быть снова преобразован в сообщение (например, с помощью телефона или громкоговорителя при передаче речи, электронно-лучевой трубки при передаче изображения, приемной части телеграфного аппарата при передаче телеграммы) и затем передан получателю.

Чтобы передать сигнал в системе электросвязи, нужно воспользоваться каким-либо переносчиком. В качестве переносчика естественно использовать те материальные объекты, которые имеют свойство перемещаться в пространстве, например, электромагнитное поле в проводах (проводная связь), в открытом пространстве (радиосвязь), световой луч (оптическая связь).

Таким образом, в пункте передачи (см. рис. 1.8) первичный сигнал необходимо преобразовать в сигнал, удобный для его передачи по соответствующей среде распространения. В пункте приема выполняется обратное преобразование.

Передача информации всегда сопровождается неизбежным действием помех и искажений. Это приводит к тому, что сигнал на выходе системы электросвязи, а значит и принятое сообщение могут в какой-то мере отличаться от сигнала на входе и переданного сообщения. Степень соответствия принятого сообщения переданному называют верностью передачи информации.

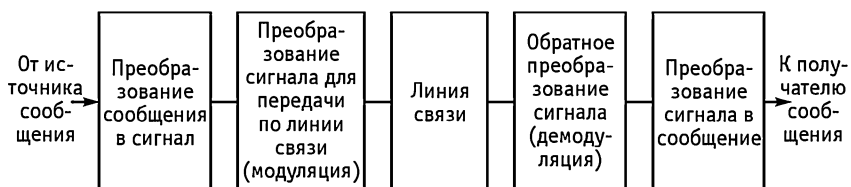


Рис. 1.8. Система электросвязи

Для различных сообщений качество их передачи оценивается по-разному. Принятое телефонное сообщение должно быть достаточно разборчивым, абонент должен быть узнаваемым. Для телевизионного сообщения существует стандарт (хорошо известная всем телезрителям таблица на экране телевизора), по которому оценивается качество принятого изображения.

Количественной оценкой верности передачи дискретных сообщений служит отношение числа ошибочно принятых элементов сообщения к числу переданных элементов – частота ошибок (или коэффициент ошибок).

Составной частью системы электросвязи является линия передачи, по которой распространяются электромагнитные сигналы. В зависимости от конкретных условий, в которых организуется связь, для передачи сигналов используют проводные или радиолинии.

По *проводным* линиям электромагнитное поле распространяется вдоль непрерывной направляющей среды. К ним относятся электрические и волоконно-оптические кабельные линии. По *радиолиниям* сообщения передаются посредством распространения электромагнитных волн в свободном пространстве.

**Электрические кабельные линии.** Кабель связи представляет собой некоторое количество проводников, изолированных друг от друга. В качестве изоляции используются кабельная бумага или различные разновидности пластмасс. Для предохранения от проникновения влаги проводники заключаются в герметическую оболочку. Сверху накладывают защитные покровы, предохраняющие кабель от механических повреждений.

Старейшие среди современных кабелей связи – городские телефонные кабели. Да и самой разветвленной кабельной сетью является городская телефонная сеть (не секрет, что большая часть телефонов находится у жителей городов).

Городские телефонные кабели бывают разные. Они могут содержать от 10 (такие кабели заводят в подъезды домов и подключают к распределительным коробкам, откуда телефонные провода тянутся в каждую квартиру) до 500, 1000 и даже 3000 пар проводов (а такие кабели используют для того, чтобы собрать воедино тянущиеся от жилых массивов к АТС более мелкие кабели). Каждая жила кабеля изолируется кабельной бумагой или бумажной массой, получаемой из целлюлозы. Жилы скручиваются определенным образом вместе и помещаются в прочную свинцовую оболочку. В последние годы, благодаря успехам химии, на смену бумажной изоляции жил и свинцовой оболочке пришли различные пластмассы (полиэтилен, поливинилхлорид, фторопласт). Прокладываются городские телефонные кабели в подземной канализации в асбестоцементных трубах.

Для связи между городами выпускаются специальные междугородные кабели – симметричные и коаксиальные. В отличие от городских

кабелей они содержат намного меньше пар проводов: не более одного-двух десятков. Лежат эти кабели прямо в земле. Для повышения механической прочности междугородные кабели «одевают» в броневые покровы (обычно это стальные бронеленты).

Когда по проводнику протекает синусоидальный ток, вокруг движущихся в металле электронов возникают электрическое и магнитное поля. Чтобы убедиться в существовании электрического поля, достаточно поместить вблизи проводника пробный электрический заряд (например, заряженный листок или бусинку). Если поле есть, то заряд сдвинется с места. Обнаружить магнитное поле можно с помощью пробной магнитной стрелки: она будет поворачиваться. Электрическое и магнитное поля часто рассматриваются вместе как единое электромагнитное поле.

Попробуем увеличить частоту синусоидального тока в проводнике. Десятки герц... Сотни герц... Килогерцы... Сотни килогерц. Мы обнаруживаем (естественно, с помощью приборов), что ток с ростом частоты все сильнее и сильнее вытесняется из толщи проводника к его поверхности. Электромагнитное поле вне проводника возрастает, и вот на очень высоких частотах (превышающих сотни и даже тысячи мегагерц) ток полностью вытесняется из проводника. Проводник начинает излучать всю электромагнитную энергию в пространство. Передача ее по проводу прекратилась. Провод превратился в антенну!

Описанное явление – вытеснение тока к внешней поверхности проводника – получило у специалистов название поверхностного эффекта. Существует довольно простое объяснение поверхностного эффекта (рис. 1.9).

В 30-х годах прошлого века английский физик М. Фарадей (1791–1867) обнаружил, что в проводнике, помещенном в переменное магнитное поле, возникает ток. Все дело в том, что наш проводник оказался помещенным в собственное магнитное поле и под его воздействием в

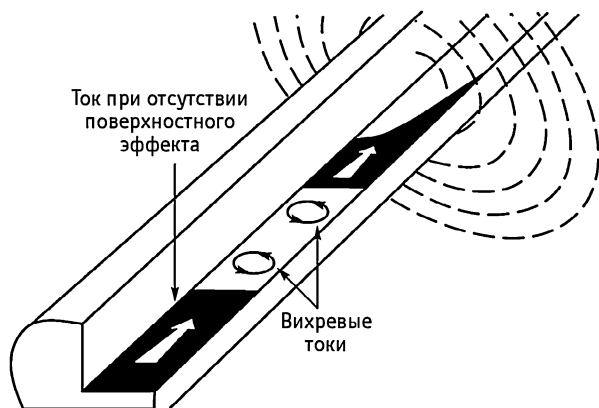


Рис. 1.9. Явление поверхностного эффекта в проводе

толще проводника образовалось множество замыкающихся по кольцу вихревых токов. У поверхности проводника эти токи направлены так же, как и основной ток, и поэтому увеличивают его. В толще же проводника вихревые токи оказываются направленными против основного тока и, следовательно, уменьшают этот основной ток.

Мы рассмотрели один провод, тогда как для передачи сигналов используются два провода – прямой и обратный (чтобы цепь тока замкнулась). Каждый из проводов образует свое электромагнитное поле. Их взаимодействие дает несколько более сложную картину поля, однако эффект излучения поля вне проводов остается практически неизменным – с ростом частоты излучение увеличивается.

В городских телефонных кабелях под одной «крышей» – оболочкой – собрано большое число пар проводов. Представим себе, что сигналы передаются только по одной паре проводов, по одной цепи (а по другим парам в это время ничего не передается). Тем не менее и в остальных «нерабочих» парах можно зафиксировать те же самые сигналы. Правда, очень слабые. И чем дальше «нерабочая» пара расположена от «рабочей», тем слабее в ней сигналы. Однако чем выше частота сигнала, т.е. чем шире спектр, тем увереннее мы будем регистрировать сигналы в «нерабочих» парах. Виной тому увеличивающееся на высоких частотах электромагнитное излучение. При широком спектре сигнала влияние одной цепи на другую может быть столь велико, что когда по второй цепи будут передаваться «свои» сигналы, их будет очень трудно отделить от «чужих».

Вот эти-то взаимные влияния между цепями и не дают возможность передавать по городским кабелям видеопрограммы. В основном они служат для организации телефонных разговоров и низкоскоростной связи компьютеров с сетью Internet или локальными сетями.

Междугородные симметричные кабели имеют такую же конструкцию пар, как и городские телефонные (два скрученных, изолированных проводника). Однако за счет небольшого количества пар и более тщательной их изоляции удастся ослабить влияние между цепями и расширить тем самым спектр передаваемого сигнала. В одной паре междугородных симметричных кабелей связи удастся «разместить» 60 телефонных разговоров, спектр которых занимает в совокупности полосу частот шириной 240 кГц.

Иное дело междугородный коаксиальный кабель! Один проводник коаксиальной пары – обычный сплошной провод, а другой (по которому ток «возвращается» обратно) – полый медный цилиндр (рис. 1.10). Сплошной проводник помещен внутрь полого. Отсюда и название – коаксиальная пара, что означает имеющая общую ось (coaxis – соосный). Чтобы строго выдержать соосность проводников, пространство между ними заполняют изолирующим материалом (сплошным полиэтиленом, полиэтиленовыми шайбами и т.п.). Придумал такую конструкцию пары проводников еще в 1912 г. профессор Петербургского электротехнического

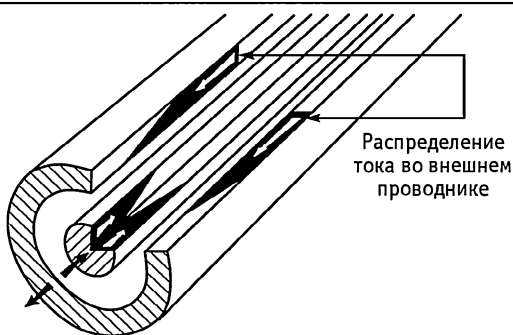


Рис. 1.10. Явление эффекта близости в коаксиальной паре

института П.Д. Войнаровский (1886–1913), а использовать ее в кабелях связи предложил в 1934 г. американский изобретатель С.А. Щелкунов.

Коаксиальная пара – это поистине замечательное изобретение! Она не излучает электромагнитную энергию в пространство, а следовательно, не будет влиять на соседние цепи связи. Это имеет принципиально важное значение, поскольку позволяет повысить скорость передачи цифр.

Ток во внутреннем проводнике с ростом частоты также вытесняется на его поверхность. Этот процесс не отличается от описанного выше. Магнитное поле внутреннего проводника наводит в металлической толще внешнего проводника вихревые токи. На наружной стороне полого проводника эти вихревые токи направлены против основного тока («срабатывает» знакомое из школьного курса правило буравчика) и тем самым уменьшают, ослабляют его. Таким образом, ток в полом цилиндре вытесняется не наружу, а внутрь коаксиальной пары. Этот эффект ученые назвали эффектом близости. Он-то и является причиной, по которой электромагнитное поле концентрируется внутри коаксиальной пары и не излучается вне ее.

С ростом частоты действие эффекта близости увеличивается и поле все сильнее и сильнее концентрируется между внутренним и внешним проводниками. Именно поэтому по коаксиальным парам передают телевизионные программы или высокоскоростные потоки компьютерных данных (миллионы бит в секунду), т.е. сигналы с шириной спектра, измеряемой в мегагерцах.

**Волоконно-оптические кабельные линии.** Оптическое волокно (световод) имеет в диаметре 5...10 мкм (это тоньше человеческого волоса). Если в такое волокно направить острый луч полупроводникового лазера, то он, распространяясь вдоль волокна, будет образовывать, как говорят, одну моду. Тонкое волокно называется одномодовым (рис. 1.11, а). На практике применяются также более толстые волокна – диаметром 50...80 мкм. С такими световодами могут «работать» недорогие и изготавливаемые в массовом количестве светодиоды. В связи с тем, что в бо-

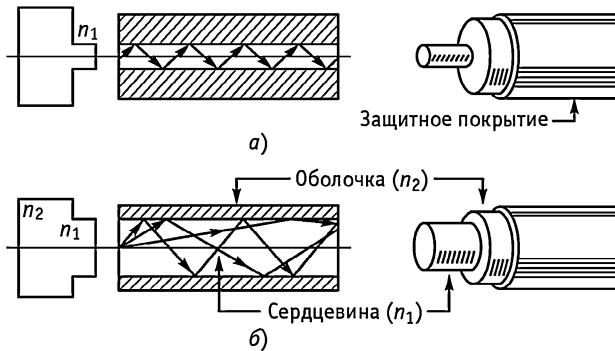


Рис. 1.11. Оптические волокна: одномодовое (а), многомодовое (б)

лее толстое волокно могут войти (и будут распространяться по нему) сразу много лучей (или мод), а не один, как в одномодовом волокне, такой световод получил название многомодового (рис. 1.1, б).

Стеклянную нить делают из двух слоев: внутренний слой образует сердцевину волокна, в которую вводят свет, а внешний является оболочкой. Показатель преломления оболочки делают ниже показателя преломления сердцевины, так что практически все световые лучи распространяются внутри сердцевины. Но волокна не применяются отдельно. Их объединяют в оптические кабели, по внешнему виду похожие на электрические и содержащие от нескольких десятков до нескольких сотен волокон.

Может сложиться впечатление, что использовать многомодовое волокно гораздо выгоднее, чем одномодовое: и высокая точность изготовления сердцевины не требуется, и дорогостоящий источник света (полупроводниковый лазер), не нужен, и меньшие сложности возникают при соединении друг с другом и волокна с источником (можно обойтись без специальных разъемов, изготовленных с очень высокой точностью и потому стоящих очень дорого). Однако это не так. У многомодовых световодов есть один существенный недостаток, сводящий на нет все их преимущества.

Представьте себе, что по такому волокну передаются импульсы с очень высокой скоростью, например 1 Гбит/с (миллиард бит в секунду). Каждому импульсу соответствует очень короткая вспышка света длительностью 1 нс (миллиардная доля секунды). Так должно быть. И так было бы, если бы вдоль волокна распространялся всего один луч. Но в многомодовом волокне наблюдается много лучей: один из них проходит более короткий путь – вдоль оси сердцевины, а другие, которым приходится отражаться от боковой поверхности бесконечное число раз, – самый длинный путь. И эта разница в пути возрастает с увеличением длины волокна. За счет опоздавших в пути лучей световой импульс «размажется» во времени. Сложится такая ситуация: уже давно пора переда-

вать следующий импульс, а еще не «погасли» вспышки света от предыдущего. Чтобы этого не случилось, приходится уменьшать скорость передачи до тех пор, пока вспышки света не будут четко отделены одна от другой интервалом времени.

Ограничения скорости передачи импульсов – вот основной недостаток многомодовых световодов. Предельная скорость передачи по ним – 20 Мбит/с, а это значит сигнал может занимать полосу частот не более двух десятков Мегагерц – почти как в коаксиальном кабеле. Зато по одномодовым световодам можно «гнать» информацию со скоростью 100 Гигабит в секунду, Гбит/с, а значит, передавать сигналы с шириной спектра до 100 ГГц, т.е. в 5000 раз больше. Заметим, что это тысячи и десятки тысяч телевизионных каналов по одному волокну!

**Радиолинии.** Передача различных видов сообщений осуществляется не только по проводным, но также и по радиолиниям. К ним относятся радиорелейные и спутниковые линии, используемые для передачи сигналов телефонной связи, программ звукового и телевизионного вещания, компьютерных данных и других сообщений; радиолинии для подключения к телефонной сети беспроводных телефонов, сильно удаленных от АТС; радиолинии в системах мобильной (сотовой, транкинговой, пейджинговой) связи, соединяющие персональное устройство (телефонный аппарат, пейджер) с базовой радиостанцией.

В радиолиниях используется ультракоротковолновый диапазон волн. Это очень широкий диапазон. Поэтому ультракороткие волны подразделяются на метровые, деци-, санти- и миллиметровые. Первые из них занимают частоты 30...300 МГц, а последние – частоты 30 000...1 000 000 МГц. Для таких сверхвысоких частот (принято сокращение СВЧ) введены специальные обозначения: гигагерцем (ГГц) называют, как мы уже знаем, каждую тысячу мегагерц, а терагерцем (ТГц) – каждую тысячу гигагерц. Таким образом, миллиметровым волнам соответствуют частоты 30 ГГц...1 ТГц.

Современная радиорелейная линия (РРЛ) состоит из двух основных и цепочки промежуточных радиорелейных станций. Каждая станция – это приемник, передатчик и высокая мачта (или башня) с антеннами. Радиоволны узким направленным лучом идут от одной станции к другой, принимаются там приемником, усиливаются передатчиком и отправляются к соседней станции.

В соответствии с регламентом радиосвязи для организации РРЛ выделены полосы частот в области от 2 до 13 ГГц.

Разновидностью радиорелейных линий являются спутниковые линии передачи, в которых роль ретранслятора выполняет не наземная промежуточная станция, а спутник связи (точнее, приемопередающий ретранслятор, помещенный на нем). Спутниковые линии являются широкополосными. Для передачи сообщений, как и в РРЛ, выделены полосы частот в очень широком диапазоне: 2...80 ГГц.



Беспроводные телефоны позволяют, используя радиолинию, подключить абонента к телефонной сети общего пользования. Многие системы беспроводных телефонов работают на частотах 800...1000 МГц.

Радиолинии в системах подвижной (мобильной) связи работают в различных диапазонах частот. Например, сотовая связь распространенного в России стандарта GSM осуществляется на частотах 890...915 МГц или на частотах 935...960 МГц.

Табл. 1.2 позволяет сравнить диапазоны частот различных линий передачи. Видно, что одни линии позволяют организовать передачу небольшого числа сообщений, например, только 60 одновременных телефонных разговоров, другие – десятки телевизионных программ и сотни тысяч телефонных разговоров.

Взгляните внимательно на табл. 1.1 и 1.2. Вы заметите, что спектры сигналов электросвязи не совпадают с полосами частот, в которых работают линии связи. Причем, последние расположены на шкале частот значительно выше, чем первые. Можно сделать важный вывод: чтобы передать сигнал по электрическому или волоконно-оптическому кабелю, по радиорелейной, спутниковой или какой-либо другой радиолинии, нужно преобразовать его спектр – перенести вверх по шкале частот. Эта операция называется *модуляцией* сигнала. На приемном конце естественно придется делать обратную операцию – перенос спектра сигнала вниз по шкале частот или *демодуляцию* сигнала (рис. 1.8).

Таблица 1.2. Полосы частот, в которых работают линии передачи

Вид линии передачи	Полосы частот
Городской телефонный кабель	0...56 кГц
Междугородный симметричный кабель	12...252 кГц
Междугородный коаксиальный кабель	312...8540 кГц
Волоконно-оптический многомодовый кабель	до 20 МГц
Радиолиния сотовой связи	
NMT-450	453...467,5 МГц
AMPS	825...890 МГц
GSM	890...960 МГц
Беспроводной телефон сети общего пользования	
CT2	864...868 МГц
DCT-900	800...1000 МГц
DECT	1880...1900 МГц
Радиолиния транкинговой связи	410...430 МГц или 915...921 МГц
Радиорелейная линия	2...13 ГГц
Спутниковая линия	2...80 ГГц
Волоконно-оптический одномодовый кабель	до 100 ГГц

При передаче сигнала по линии связи его спектр претерпевает изменения; это приводит к искажению сигнала

Предположим, что по линии связи передаются прямоугольные импульсы. Давайте посмотрим на примере кабельной линии, из-за чего возникают искажения формы импульсов.

Кабельная линия связи – это два провода из десяти, а может, из сотни проводов (в зависимости от типа кабеля), выделенные для данной системы передачи. Что же представляет собой импульс тока? Глядя на него, мы отчетливо видим, что ток сначала резко, скачком, возрастает, некоторое время остается постоянным, затем также резко, скачком, падает до нуля. Но изменение тока в проводе, как известно, приводит к изменению магнитного поля вокруг него. Это поле действует не только в пространстве вокруг провода, оно пронизывает и сам провод. Когда собственное магнитное поле провода меняется, то оно по всем правилам электромагнитной индукции наводит в самом этом проводе ЭДС самоиндукции. Еще из школы мы знаем, что ЭДС самоиндукции всегда мешает любому изменению тока в цепи. Если ток в цепи, составленной в нашем случае из двух проводов (один – прямой, другой – обратный), увеличивается, то ЭДС самоиндукции всегда мешает этому увеличению и ток в цепи возрастает не так резко. Если ток в цепи уменьшается, то она мешает этому уменьшению, поддерживает ток, и в итоге он падает более плавно.

Величина наводимой в проводе ЭДС зависит от скорости изменения тока. Чем больше эта скорость, тем бóльшая наводится ЭДС. Особенно сильно она возрастает при резком изменении тока, таком, как, скажем, в импульсе. В проводах разной марки при одной и той же скорости изменения тока может наводиться разная по величине ЭДС самоиндукции. Говорят, что эти провода обладают разным коэффициентом самоиндукции, или, короче, коэффициентом индуктивности, или просто индуктивностью  $L$ .

Итак, провода кабеля обладают индуктивностью. Кроме того, они оказывают току сопротивление  $R$ , вследствие чего, он добегая до конца линии, сильно ослабевает. Если еще учесть, что изоляция между проводами не является идеальной (она все же чуть-чуть проводит ток), и отразить данный факт включением между ними проводимости  $G$ , то получится электрическая схема линии связи (рис. 1.12, *a*). Благодаря наличию индуктивности линия искажает форму импульса: она «растягивает» его во времени.

При внимательном рассмотрении схемы на рис. 1.12, *a* можно прийти к выводу, что это схема фильтра нижних частот, который пропускает низкие частоты спектра сигнала (речи, музыки и т.п.) и препятствует про-

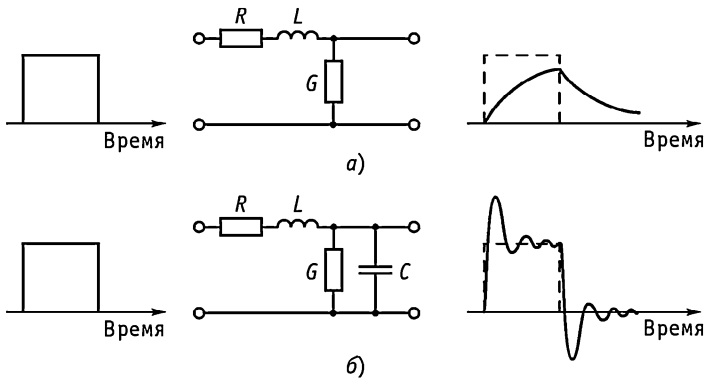


Рис. 1.12. Искажения импульса при прохождении по линии связи

хождению высоких частот. Таким образом, в спектре искаженного импульса на выходе линии связи будут отсутствовать высокочастотные составляющие, которые как раз и призваны формировать крутые фронты импульса. Без них-то импульс и «растягивается» во времени.

Надо сказать, что приведенная электрическая схема является неполной. Два провода в кабеле связи, разделенные изоляцией, образуют конденсатор. В разных типах кабелей емкость между парами проводов различна. Таким образом, более точная электрическая модель линии связи кроме сопротивления, индуктивности и проводимости содержит еще и емкость, подключенную к проводам параллельно проводимости (рис. 1.2, б).

Опытные радиолюбители, вероятно, заметили, что приведенная электрическая схема линии мало чем отличается от известного им колебательного контура. Это, по существу, и есть колебательный контур. Если бы в нем не было сопротивления и проводимости, а присутствовали только индуктивность и емкость, т.е. если бы контур был идеальным, в нем можно было бы возбудить незатухающие колебания. Однако в реальном контуре часть энергии тратится на нагревание проводов и превращается в тепло, поэтому колебания в контуре будут затухать. К чему приводит наличие емкости между проводами, можно увидеть из рис. 1.12, б: в линии при подаче на ее вход импульса тока будут возникать затухающие колебания. Известно, что колебательный контур – это фильтрующая цепь, пропускающая из богатого спектра импульса только средние частоты и подавляющая низкие и высокие частоты. Чем меньше потери энергии в контуре, тем уже полоса пропускаемых им частот и тем больше импульс на выходе контура становится похож на синусоиду. Вот такого рода искажения претерпевают импульс и его спектр в линии связи. Подавление низких и высоких частот в речевых, телевизионных и других сигналах приводит к ухудшению качества звучания, изображения и т.п.

Все сигналы можно разбить на несколько крупных классов: периодические, непериодические (непрерывные и импульсные), дискретные и модулированные. Задача спектрального анализа состоит в исследовании спектров сигналов данных классов

*Периодическим* называется сигнал, форма которого повторяется через определенные равные промежутки времени, называемые периодом повторения сигнала, или просто *периодом* (рис. 1.13). Периодические сигналы не могут использоваться для передачи информации, поскольку в любой момент времени мы знаем, каким будет значение сигнала, в то же время любая информация связана, прежде всего, с неопределенностью.

Но зато периодические сигналы успешно применяются в качестве управляющих, измерительных и испытательных сигналов. Так, напряжение периодически повторяющейся пилообразной формы управляет разверткой телевизионного изображения на экране, периодическая последовательность прямоугольных импульсов используется для управления переключающими устройствами, периодическое напряжение синусоидальной формы служит для измерений характеристик систем передачи на контрольных частотах и т.п.

К непериодическим непрерывным сигналам относят прежде всего речевые, музыкальные, телевизионные и другие сигналы, несущие в себе определенные сообщения. Форма речевого сигнала была приведена, например, на рис. 1.4.

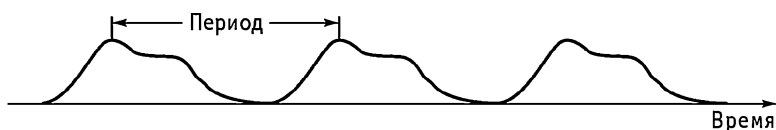


Рис. 1.13. Периодический сигнал

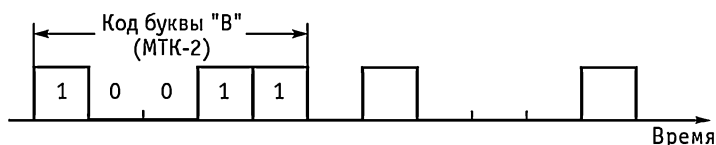


Рис. 1.14. Непериодический импульсный сигнал

Непериодические импульсные сигналы – это импульсы различной формы (прямоугольной, косинусоидальной, треугольной и т.п.), возникающие только один раз, либо повторяющиеся, но в хаотичном, случайном наборе. Импульс может принять любую форму, но всегда имеет конечную протяженность. Телеграфные сигналы – служебная последовательность прямоугольных импульсов являются типичным представителем импульсных непериодических сигналов (рис. 1.14).

По своей природе многие сигналы (телефонные, факсимильные, телевизионные) являются непрерывными, или аналоговыми сигналами. Но, оказывается, не всегда нужно воспроизводить сигнал непрерывно во все моменты времени. Достаточно использовать его отсчетные (дискретные) значения через определенные равные промежутки времени.

С подобной проблемой мы сталкиваемся в жизни довольно часто. Если через очень короткие промежутки времени (скажем, через 1 с) наносить значения температуры воздуха на график, то получим множество точек, отражающих изменение температуры (рис. 1.15). Таким образом, имеем дело не с непрерывной кривой изменения температуры, а лишь с ее значениями, отсчитанными через определенные промежутки времени. Подобный процесс называется *дискретизацией* непрерывного сигнала. Ясно, что быстроизменяющиеся во времени аналоговые сигналы требуют для их дискретизации малого шага.

В технике связи дискретизация сигнала, например, речи (рис. 1.16), используется для того, чтобы между отсчетами одного сообщения «вставить» отсчеты других сообщений и, тем самым, организовать передачу по одной линии связи одновременно нескольких сообщений.

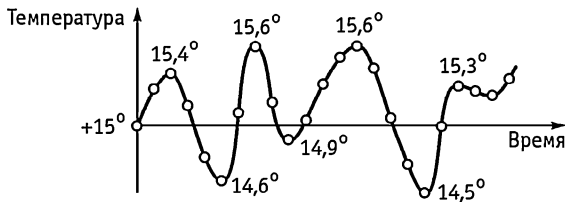


Рис. 1.15. Дискретные значения непрерывной функции

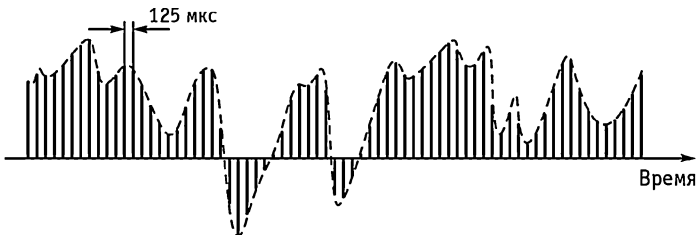


Рис. 1.16. Дискретные отсчеты речевого сигнала

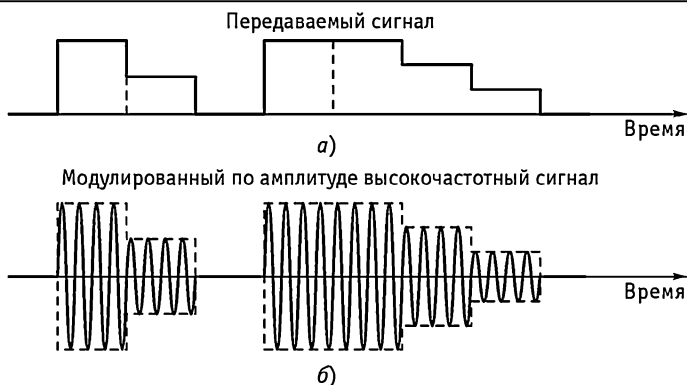


Рис. 1.17. Передаваемый сигнал (а) и модулированный по амплитуде высокочастотный переносчик (б)

Как мы уже отмечали ранее, для передачи любых сигналов по линиям связи необходимо перенести их спектр в полосу пропускания линии связи. Перенос спектра по шкале частот осуществляется путем модуляции сигнала. На рис. 1.17 приведен пример модулированного сигнала. Амплитуду высокочастотного сигнала, который хорошо «укладывается» в полосу пропускания линии передачи, заставляют изменяться в такт передаваемому сообщению, вкладывая, таким образом, информацию в высокочастотный сигнал. Высокочастотный сигнал выступает при этом в роли переносчика информации.

Задачей спектрального анализа сигналов является исследование спектров сигналов на входе и выходе какого-либо устройства, определение характера изменения спектра сигнала при прохождении его через данное устройство и установление в конечном счете искажения формы сигнала, которое оказывает влияние на качество передачи. Иногда требуется специальное воздействие на спектр сигнала: например, «вырезание» из него служебной информации, подавление сильно зашумленных частотных составляющих и т.п.

Исследованиям спектров различных сигналов посвящены следующие главы книги.

### Вопросы и задания для самоконтроля

1. В каких диапазонах частот электромагнитных колебаний осуществляется телефонная связь, радиовещание, мобильная связь, кабельное телевидение (по рис. 1.1)?
2. Пояснить графики зависимости давления звука от времени, изображенные на рис. 1.3.
3. Назвать частотные границы спектра звукового сигнала и эффективного спектра речи.

4. Каким образом осуществляется передача неподвижного изображения в факсимильный сигнал?
5. От чего зависит ширина спектра факсимильного сигнала?
6. Какой сигнал используется для передачи на расстояние подвижных изображений? Какова ширина его спектра?
7. Какой сигнал называется телеграфным?
8. Как связаны скорость телеграфирования и длительность импульса, соответствующего наличию тока в цепи?
9. Как изменится ширина спектра телеграфного сигнала, если скорость его передачи увеличить в 2 раза?
10. Что представляет собой система электросвязи (пояснить по рис. 1.8).
11. Для чего выполняют модуляцию и демодуляцию сигнала?
12. Какие линии передачи используются в системах электросвязи?
13. Почему при передаче сигнала по линии связи происходит искажение его формы?
14. Какие сигналы называются:
  - а) периодическими;
  - б) непериодическими (непрерывными и импульсными);
  - в) дискретными;
  - г) модулированными?
15. В чем заключается задача спектрального анализа?

## 2. Спектральный анализ периодических сигналов

Периодическая последовательность прямоугольных импульсов состоит из ... обычных синусоид

Напомним, прежде всего, что периодическим называется сигнал, значения которого повторяются через равные промежутки времени, называемые *периодом*.

Синусоида, или гармоническое колебание вида

$$u(t) = U_m \sin \omega t,$$

является простейшим периодическим сигналом.

Примером сложного периодического сигнала может служить последовательность прямоугольных импульсов с периодом повторения  $T$  (рис. 2.1, *а*). Как Вы думаете, из чего состоят прямоугольные импульсы? Оказывается, из синусоид. Взгляните на рис. 2.1. В качестве исходной синусоиды нужно выбрать такую, у которой период совпадает с периодом повторения  $T$  прямоугольных импульсов (рис. 2.1, *б*):

$$u_1(t) = U_{m1} \sin \omega_1 t = U_{m1} \sin 2\pi f_1 t = U_{m1} \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Следующая синусоида должна иметь частоту в три раза большую, а амплитуду – в три раза меньшую:

$$u_3(t) = \frac{1}{3} U_{m1} \sin 3\omega_1 t = \frac{1}{3} U_{m1} \sin 6\pi f_1 t = \frac{1}{3} U_{m1} \sin \frac{6\pi}{T} t.$$

Сумма этих двух синусоид пока еще мало похожа на прямоугольные импульсы (рис. 2.1, *в*). Но если мы добавим к ним синусоиды с частотами в 5, 7, 9, 11 и т.д. раз меньшими, то сумма всех этих колебаний:

$$u(t) = U_{m1} \sin \omega_1 t + \frac{U_{m1}}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{U_{m1}}{5} \sin 5\omega_1 t + \frac{U_{m1}}{7} \sin 7\omega_1 t + \frac{U_{m1}}{9} \sin 9\omega_1 t + \frac{U_{m1}}{11} \sin 11\omega_1 t + \dots \quad (2.1)$$

будет не так уж сильно отличаться от прямоугольных импульсов (рис. 2.1, *г* и *д*).



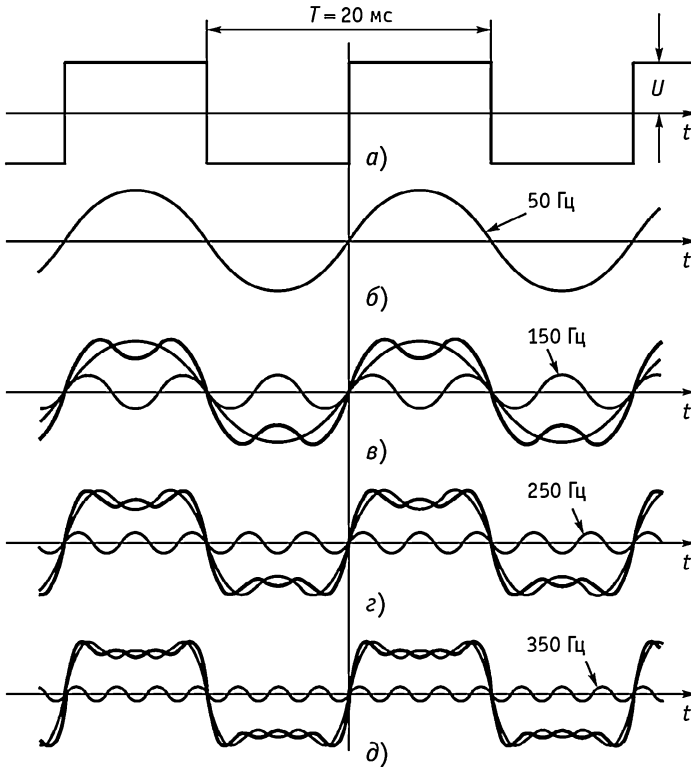


Рис. 2.1. Гармонические составляющие прямоугольной последовательности импульсов

Для того, чтобы сигнал, сформированный из синусоид (2.1), совпадал с прямоугольными импульсами также и по высоте, амплитуду основной синусоиды следует взять:

$$U_{m1} = \frac{4}{\pi} U = 1,27U.$$

Таким образом, степень прямоугольности импульсов определяется количеством синусоид со все более высокими частотами, которые мы будем суммировать в (2.1).

**Пример 2.1.** Определим параметры синусоид, формирующих последовательность прямоугольных (рис. 2.1, а) импульсов, имеющих амплитуду  $U = 10 \text{ В}$  и период  $T = 20 \text{ мс}$ .

Для формирования периодической последовательности прямоугольных импульсов амплитуда основной синусоиды должна быть

$$U_{m1} = 1,27U = 1,27 \cdot 10 = 12,7 \text{ В.}$$

Частота колебаний этой синусоиды обратно пропорциональна периоду:

$$f_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{20 \cdot 10^{-3}} = 50 \text{ Гц.}$$

Круговая частота  $\omega_1 = 2\pi f_1 = 100\pi$  рад/с. Таким образом, основная синусоида

$$u_1(t) = U_{m1} \sin \omega_1 t = 12,7 \sin 100\pi t, \text{ В.}$$

Все последующие синусоиды определяются в соответствии с (2.1):

$$u_3(t) = \frac{U_{m1}}{3} \sin 3\omega_1 t = 4,23 \sin 300\pi t, \text{ В;}$$

$$u_5(t) = \frac{U_{m1}}{5} \sin 5\omega_1 t = 2,54 \sin 500\pi t, \text{ В;}$$

$$u_7(t) = \frac{U_{m1}}{7} \sin 7\omega_1 t = 1,81 \sin 700\pi t, \text{ В}$$

и т.д.

Последовательность прямоугольных импульсов, изображенных на рис. 2.1, *a* – это сумма синусоид:

$$u(t) = 12,7 \sin 100\pi t + 4,23 \sin 300\pi t + 2,54 \sin 500\pi t + 1,81 \sin 700\pi t + \dots$$

Сигнал  $u(t) = u_1(t) + u_3(t) + u_5(t) + u_7(t)$  изображен на рис. 2.1, *д*.

Сигнал, похожий на зубья пилы, также состоит из ... обычных синусоид

Этот сигнал называют периодической последовательностью пилообразных импульсов (рис. 2.2, *a*). Радиолюбители знают, что подобную форму имеет напряжение, развертывающее изображение на экране телевизора по строкам.

Чтобы сформировать пилообразный сигнал, нужно кроме основной синусоиды (рис. 2.2, *б*):

$$u_1(t) = U_{m1} \sin \omega_1 t = U_{m1} \sin 2\pi f_1 t = U_{m1} \sin \frac{2\pi}{T} t$$

с амплитудой

$$U_{m1} = \frac{2}{\pi} U = 0,635U$$

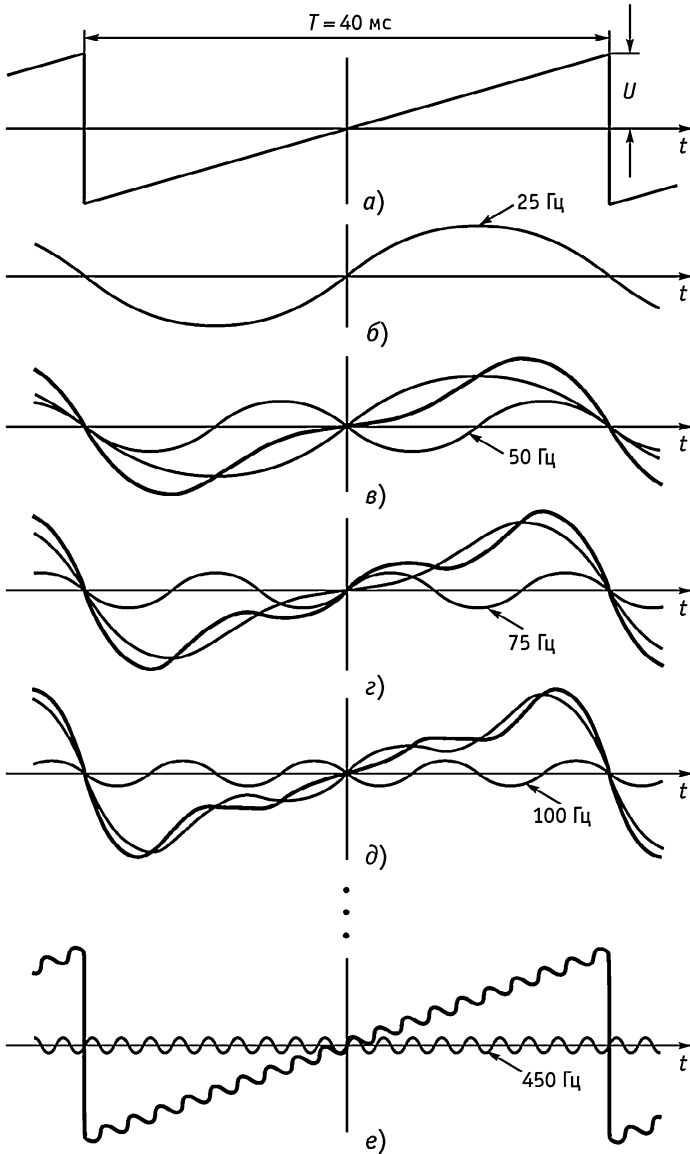


Рис. 2.2. Гармонические составляющие пилообразной последовательности импульсов

использовать перевернутую синусоиду удвоенной частоты и половинной амплитуды (рис. 2.2, в)

$$u_2(t) = -\frac{U_{m1}}{2} \sin 2\omega_1 t = -\frac{U_{m1}}{2} \sin 4\pi f_1 t = -\frac{U_{m1}}{2} \sin \frac{4\pi}{T} t,$$

а также синусоиды с утроенной, учетверенной и т.д. частотами (рис. 2.2,  $z - e$ ):

$$u(t) = U_{m1} \sin \omega_1 t - \frac{U_{m1}}{2} \sin 2\omega_1 t + \frac{U_{m1}}{3} \sin 3\omega_1 t - \frac{U_{m1}}{4} \sin 4\omega_1 t + \frac{U_{m1}}{5} \sin 5\omega_1 t - \dots \quad (2.2)$$

Изменение начала координат может превратить ряд, состоящий из синусов, в косинусный ряд

Покажем на примере последовательности прямоугольных импульсов, как изменение начала координат превращает ряд, состоящий из синусов, в ряд, состоящий из косинусов.

Рисунок 2.3, *a* отличается от рис. 2.1, *a* незначительно: момент наблюдения (т.е. начало координат) смещен вправо на четверть периода последовательности прямоугольных импульсов.

Колебание, которое начинается раньше начала координат, называется опережающим по отношению к колебанию, возникающему из начала координат, и характеризуется появлением начальной фазы со знаком «плюс». Это означает, что вместо колебания (2.1) мы будем иметь дело с колебанием, опережающим по фазе данное колебание на  $\pi/2$  рад или на  $90^\circ$  (рис. 2.3, *b*):

$$u_1(t) = U_{m1} \sin \left( \omega_1 t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Колебание утроенной частоты  $3\omega_1$  после переноса начала координат получит сдвиг по фазе, равный  $3\pi/2$  рад или  $270^\circ$  (рис. 2.3, *в*):

$$u_3(t) = \frac{1}{3} U_{m1} \sin \left( 3\omega_1 t + \frac{3}{2} \pi \right).$$

Продолжая действовать таким образом, мы придем к формуле для последовательности прямоугольных импульсов:

$$u(t) = U_{m1} \sin \left( \omega_1 t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{U_{m1}}{3} \sin \left( 3\omega_1 t + \frac{3}{2} \pi \right) + \frac{U_{m1}}{5} \sin \left( 5\omega_1 t + \frac{5}{2} \pi \right) + \frac{U_{m1}}{7} \sin \left( 7\omega_1 t + \frac{7}{2} \pi \right) + \frac{U_{m1}}{9} \sin \left( 9\omega_1 t + \frac{9}{2} \pi \right) + \frac{U_{m1}}{11} \sin \left( 11\omega_1 t + \frac{11}{2} \pi \right) + \dots \quad (2.3)$$

Применив к (2.3) тригонометрические формулы приведения

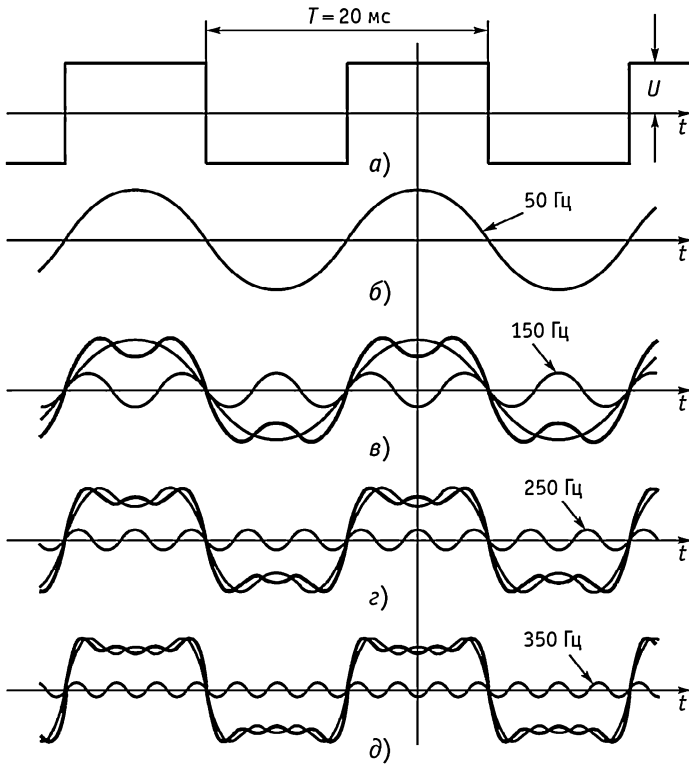


Рис. 2.3. Перенос начала координат в периодической последовательности прямоугольных импульсов

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha, \quad \sin\left(\beta + \frac{3}{2}\pi\right) = -\cos \beta,$$

$$\sin\left(\gamma + \frac{5}{2}\pi\right) = \sin\left(\gamma + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \gamma,$$

$$\sin\left(\delta + \frac{7}{2}\pi\right) = \sin\left(\delta + \frac{3}{2}\pi\right) = -\cos \delta,$$

$$\sin\left(\lambda + \frac{9}{2}\pi\right) = \sin\left(\lambda + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \lambda,$$

.....

можно представить ряд (2.3) в виде суммы только косинусов:

$$u(t) = U_{m1} \cos \omega_1 t - \frac{U_{m1}}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{U_{m1}}{5} \cos 5\omega_1 t - \\ - \frac{U_{m1}}{7} \cos 7\omega_1 t + \frac{U_{m1}}{9} \cos 9\omega_1 t - \frac{U_{m1}}{11} \cos 11\omega_1 t + \dots \quad (2.4)$$

Периодические сигналы любой формы также состоят из синусоид или косинусоид; при этом нечетные сигналы состоят только из синусоид, в то время как четные сигналы – только из косинусоид

В табл. 2.1 приведены наиболее часто встречающиеся на практике периодические последовательности импульсов и записаны их представления в виде синусных или косинусных рядов. Из таблицы видно, что нечетные функции содержат только синусоиды, а четные – только косинусоиды. В честь французского математика приведенные в таблице ряды называются *рядами Фурье*.

Наинизшая частота синусоидальных или косинусоидальных компонентов есть

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{или} \quad f_1 = \frac{1}{T}.$$

Эта частота принадлежит основной составляющей и совпадает с частотой повторения сигнала. Периодический сигнал с периодом в 1 миллисекунду (мс) имеет основную составляющую с частотой  $f_1 = 1$  кГц.

Частоты остальных составляющих сигнала являются числами, кратными частоте основной составляющей. Эти составляющие называются *гармониками* основного компонента, и номер гармоники определяется отношением ее частоты к частоте основной составляющей. Так, в приведенном в предыдущем абзаце примере гармониками основной составляющей в общем случае могут быть вторая – с частотой 2 кГц, третья – с частотой 3 кГц, четвертая – с частотой 4 кГц и т.д.

Кромс основной составляющей и высших гармоник в сигнале может присутствовать постоянная составляющая

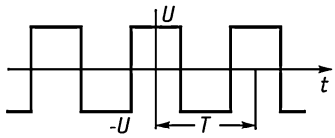
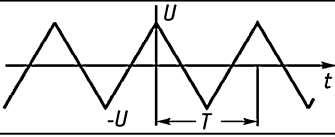
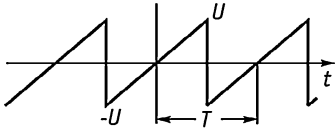
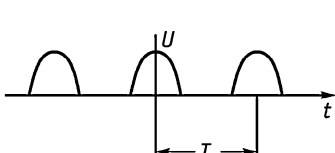
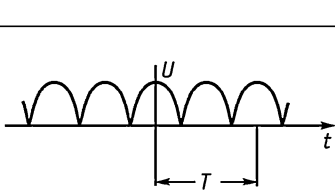
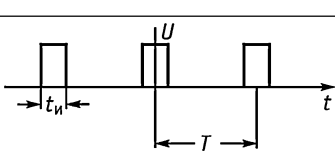
Посмотрите на рис. 2.4, *а* и *б*. Нижний рисунок получен из верхнего вычитанием среднего значения сигнала, которое вычисляется, как известно, по формуле

$$U_0 = \frac{\text{Площадь под кривой за один период}}{\text{период}}.$$

Для последовательности прямоугольных импульсов, изображенной на рис. 2.4, *а*, указанную площадь вычислить нетрудно, поэтому

$$U_0 = \frac{2U(T/2)}{T} = U.$$

Таблица 2.1. Ряды Фурье некоторых периодических сигналов

Сигнал	Ряд Фурье
	$U_{m1} \cos \omega_1 t - \frac{U_{m1}}{3} \cos 3\omega_1 t +$ $+ \frac{U_{m1}}{5} \cos 5\omega_1 t - \frac{U_{m1}}{7} \cos 7\omega_1 t + \dots$ $U_{m1} = 4U/\pi = 1,27U$
	$U_{m1} \cos \omega_1 t + \frac{U_{m1}}{9} \cos 3\omega_1 t + \frac{U_{m1}}{25} \cos 5\omega_1 t + \dots$ $U_{m1} = 8U/\pi^2 = 0,8U$
	$U_{m1} \sin \omega_1 t - \frac{U_{m1}}{2} \sin 2\omega_1 t +$ $+ \frac{U_{m1}}{3} \sin 3\omega_1 t - \frac{U_{m1}}{4} \sin 4\omega_1 t + \dots$ $U_{m1} = 2U/\pi = 0,635U$
	$U_0 + \frac{\pi U_{m1}}{4} \cos \omega_1 t + \frac{U_{m1}}{3} \cos 2\omega_1 t - \frac{U_{m1}}{15} \cos 4\omega_1 t +$ $+ \frac{U_{m1}}{35} \cos 6\omega_1 t + \dots (-1)^{k/2+1} \frac{U_{m1}}{k^2-1} \cos k\omega_1 t + \dots$ $k - \text{четные}; U_{m1} = 2U/\pi = 0,635U;$ $U_0 = U/\pi = 0,3175U$
	$U_0 + \frac{U_{m1}}{3} \cos 2\omega_1 t - \frac{U_{m1}}{15} \cos 4\omega_1 t +$ $+ \frac{U_{m1}}{35} \cos 6\omega_1 t - \dots (-1)^{k/2+1} \frac{U_{m1}}{k^2-1} \cos k\omega_1 t + \dots$ $k - \text{четные}; U_{m1} = 4U/\pi = 1,27U;$ $U_0 = 2U/\pi = 0,635U$
	$U_0 + U_{m1} \cos \omega_1 t + U_{m2} \cos 2\omega_1 t +$ $+ U_{m3} \cos 3\omega_1 t + \dots$ $U_0 = U/q; q = T/t_n; U_{mk} = \frac{2U}{q} \frac{\sin k\pi/q}{k\pi/q}$

В случае, когда сигнал имеет сложную форму, площадь вычисляется с помощью интеграла:

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt.$$

Среднее значение сигнала  $U_0$  называют *постоянной составляющей*. Удаление постоянной составляющей из последовательности прямоугольных импульсов на рис. 2.4, а приводит к последовательности, показанной на рис. 2.4, б.

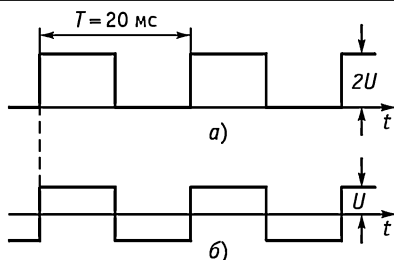


Рис. 2.4. Однополярная (а) и двухполярная (б) последовательности прямоугольных импульсов

Поскольку гармонический состав последнего сигнала известен (2.1), то гармонический состав однополярной последовательности импульсов (рис. 2.4, а) будет отличаться только наличием постоянной составляющей  $U_0$ :

$$u(t) = U_0 + U_{m1} \sin \omega_1 t + \frac{U_{m1}}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{U_{m1}}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots$$

В двух последних строках табл. 2.1 можно увидеть постоянные составляющие у переменного напряжения, выпрямленного одно- и двухполупериодным выпрямителями.

**Пример 2.2.** Определим гармонический состав последовательности треугольных импульсов, изображенных на рис. 2.5, имеющих амплитуду  $U = 10$  В, и период  $T = 10$  мс.

Периодический сигнал на рис. 2.5 отличается от сигнала во второй строке таблицы 2.1 на величину постоянной составляющей

$$U_0 = \frac{U}{2} = 5 \text{ В.}$$

Частота основной составляющей сигнала

$$f_1 = \frac{1}{T} = 100 \text{ Гц}$$

или

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = 200\pi \text{ рад/с.}$$

Амплитуда основной составляющей сигнала рассчитывается по формуле, приведенной в табл. 2.1:

$$U_{m1} = \frac{8U}{\pi^2} = 0,8U = 0,8 \cdot 5 = 4 \text{ В.}$$

Четная функция (рис. 2.5) содержит только косинусоиды, амплитуды и частоты которых определяются по формулам, приведенным во второй строке табл. 2.1.

Амплитуда и частота третьей гармоники:



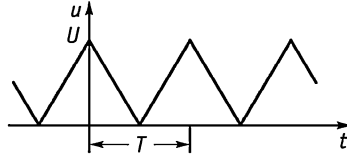


Рис. 2.5. Последовательность треугольных импульсов

$$U_{m3} = \frac{U_{m1}}{9} = \frac{4}{9} = 0,44 \text{ В}, \quad 3\omega_1 = 600\pi \text{ рад/с.}$$

Амплитуда и частота пятой гармоники:

$$U_{m5} = \frac{U_{m1}}{25} = \frac{4}{25} = 0,16 \text{ В}, \quad 5\omega_1 = 1000\pi \text{ рад/с.}$$

Амплитуда и частота седьмой гармоники:

$$U_{m7} = \frac{U_{m1}}{49} = \frac{4}{49} = 0,08 \text{ В}, \quad 7\omega_1 = 1400\pi \text{ рад/с}$$

и т.д.

Гармонический состав последовательности треугольных импульсов (рис. 2.5) определяется как

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 + U_{m1} \cos \omega_1 t + U_{m3} \cos 3\omega_1 t + \\ &+ U_{m5} \cos 5\omega_1 t + U_{m7} \cos 7\omega_1 t = \\ &= 5 + 4 \cos 200\pi t + 0,44 \cos 600\pi t + \\ &+ 0,16 \cos 1000\pi t + 0,08 \cos 1400\pi t + \dots, \text{ В.} \end{aligned}$$

Общая форма записи ряда Фурье не зависит от момента наблюдения за сигналом

Мы наблюдали ранее, как изменение начала координат (т.е. момента наблюдения) превращало ряд синусов в ряд косинусов. Так, при переносе начала координат на рис. 2.1, а вправо на четверть периода последовательности прямоугольных импульсов (т.е. при переходе к рис. 2.3, а) изменились начальные фазы основной составляющей и высших гармоник на величины, кратные  $\pi/2$  рад (2.3).

Очевидно, если начало координат переносить на произвольное расстояние вправо или влево, то начальные фазы основной составляющей и гармоник в (2.3) будут принимать любые значения, а не только кратные  $\pi/2$  рад. В этом случае ряд (2.3) преобразуется в ряд:

$$u(t) = U_{m1} \sin(\omega_1 t + \theta_1) + \frac{U_{m1}}{3} \sin(3\omega_1 t + \theta_3) + \frac{U_{m1}}{5} \sin(5\omega_1 t + \theta_5) + \dots,$$

где  $U_{m1} = 1,27U$ ;  $\theta_n$  — начальная фаза  $n$ -й гармоники.

Для однополярной последовательности прямоугольных импульсов, типа показанной на рис. 2.4, а, к данному ряду добавится постоянная составляющая  $U_0 = U/2$ .

Каждый сигнал, отличающийся от других по форме, имеет свой существенно индивидуальный гармонический состав, т.е. содержит основную синусоиду и ее высшие гармоники со своими амплитудами и начальными фазами. Поэтому в общем случае ряд Фурье для произвольного периодического сигнала записывается в форме:

$$u(t) = U_0 + U_{m1} \sin(\omega_1 t + \theta_1) + U_{m2} \sin(2\omega_1 t + \theta_2) + U_{m3} \sin(3\omega_1 t + \theta_3) + U_{m4} \sin(4\omega_1 t + \theta_4) + U_{m5} \sin(5\omega_1 t + \theta_5) + \dots = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \sin(n\omega_1 t + \theta_n). \quad (2.5)$$

Мы уже знаем, что амплитуды некоторых гармоник могут быть равны нулю, а фазы могут принимать любые значения, в том числе и кратные  $\pi/2$  рад – это зависит от формы сигнала (см. табл. 2.1).

Форма записи ряда Фурье (2.5) получила название амплитудно-фазовой формы. Она справедлива для любого момента наблюдения, т.е. для любого расположения начала координат. Изменение начала координат меняет только значение фазовых углов  $\theta_n$ .

Существуют две равноправные записи ряда Фурье в амплитудно-фазовой форме – через функцию синуса и через функцию косинуса

Ряд Фурье с использованием функции синуса мы уже записали в виде формулы (2.5). Чтобы заменить функцию синуса на функцию косинуса, обратимся к представлению колебания в виде вектора на комплексной плоскости.

Мгновенное напряжение

$$u(t) = U_m \sin \omega_1 t \quad (2.6)$$

с частотой  $\omega_1$  можно изобразить на комплексной плоскости как вектор, направленный первоначально вдоль положительной горизонтально полуоси (рис. 2.6, а) и вращающийся с угловой скоростью  $\omega_1$ .

Аналогичным образом мгновенное напряжение

$$u(t) = U_m \cos \omega_1 t \quad (2.7)$$

отображается вектором, направленным вдоль положительной вертикальной полуоси (рис. 2.6, б) и вращающимся с той же скоростью.

Поэтому положительную горизонтальную полуось комплексной плоскости можно с полным основанием назвать осью синусоидальных функций или, короче, осью синусов, а положительную вертикальную полуось – осью косинусоидальных функций или осью косинусов.

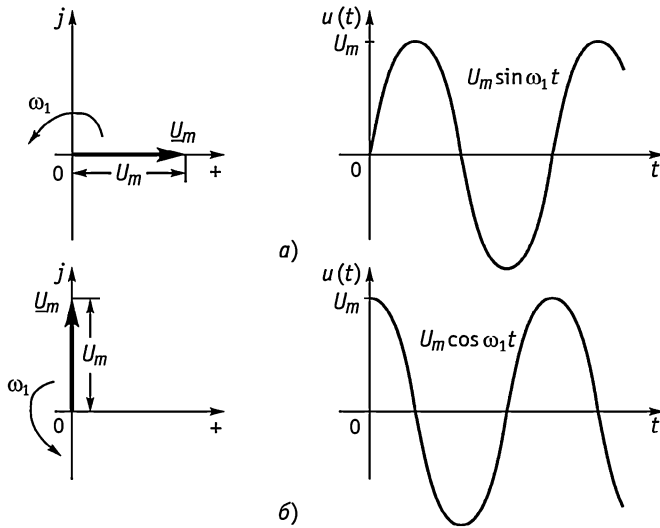


Рис. 2.6. Векторные диаграммы и осциллограммы синусоидального (а) и косинусоидального (б) сигналов

Гармоническому колебанию

$$u(t) = 4 \sin(\omega_1 t + 30^\circ)$$

соответствует вектор (рис. 2.7)

$$\underline{U}_m = 4e^{j30^\circ},$$

который *опережает* положительную ось синусов на  $30^\circ$ , т.е. его можно получить вращением вектора на рис. 2.6, а на  $+30^\circ$ .

Если желательно записать этот вектор как функцию косинуса, то следует обратить внимание на то, что получить картину, показанную рис. 2.7, можно только одним способом – вращать вектор на рис. 2.6, б на угол  $-60^\circ$ . В этом случае вместо колебания (2.7) получим колебание:

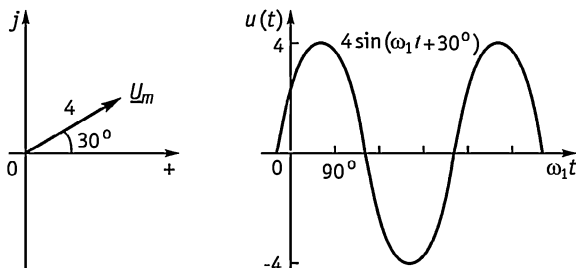


Рис. 2.7. Векторное и временное представление гармонического сигнала

$$u(t) = 4 \cos(\omega_1 t - 60^\circ).$$

Таким образом, можно сделать вывод, что *при записи гармонического колебания в виде синусной функции угол, или начальная фаза колебания, отсчитывается от положительной горизонтальной полуоси, а при записи колебания в косинусной форме угол отсчитывается от положительной вертикальной полуоси.*

Основываясь на описанном правиле, легко привести две равнозначные записи ряда Фурье:

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \sin(n\omega_1 t + \theta_n) \quad (2.8)$$

и

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos(n\omega_1 t - \varphi_n), \quad (2.9)$$

где угол  $n$ -й гармоники  $\theta_n$  отсчитывается от положительной горизонтальной оси, а угол  $\varphi_n$  – от положительной вертикальной оси комплексной плоскости. Вот и вся разница!

Чтобы избежать путаницы, примем в дальнейшем в качестве основной формы записи ряда Фурье формулу (2.9) и, кроме того, будем иметь дело не с угловой частотой  $\omega_1$ , а с линейной частотой  $f_1$  в Гц, кГц, МГц, устанавливаемой на шкалах реальных измерительных приборов, так что ряд Фурье будет иметь вид

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos(2\pi n f_1 t - \varphi_n). \quad (2.10)$$

Напомним, что запись (2.10) называется *амплитудно-фазовой формой* ряда Фурье.

Набор гармоник, образующих ряд Фурье в амплитудно-фазовой форме, называют спектром периодического сигнала, а наборы амплитуд и начальных фаз этих гармоник – спектрами амплитуд и фаз

Каждую гармонику

$$u_n(t) = U_{mn} \cos(2\pi n f_1 t - \varphi_n)$$

можно отобразить двумя вертикальными линиями. Для этого на одной оси частот необходимо отложить значение частоты этой гармоники  $n f_1$  и изобразить вертикальную линию высотой, равной амплитуде гармоники

ки  $U_{mn}$ ; затем на другой оси частот на частоте этой же гармоники  $nf_1$  изобразить вторую вертикальную линию, равную по высоте начальной фазе гармоники  $\varphi_n$ <sup>1</sup>. После такой договоренности ряд Фурье (2.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} u(t) = & U_{m1} \cos(2\pi \cdot f_1 t - 90^\circ) + \frac{U_{m1}}{3} \cos(2\pi \cdot 3f_1 t - 270^\circ) + \\ & + \frac{U_{m1}}{5} \cos(2\pi \cdot 5f_1 t - 450^\circ) + \frac{U_{m1}}{7} \cos(2\pi \cdot 7f_1 t - 630^\circ) + \quad (2.11) \\ & + \frac{U_{m1}}{9} \cos(2\pi \cdot 9f_1 t - 810^\circ) + \frac{U_{m1}}{11} \cos(2\pi \cdot 11f_1 t - 990^\circ) + \dots \end{aligned}$$

Учитывая, что функция косинуса периодична с периодом  $2\pi = 360^\circ$ , т.е. ее значения повторяются через  $360^\circ$ , можно вычесть целое число периодов из фазовых углов гармонических составляющих. Тогда получим еще одну форму записи ряда (2.1):

$$\begin{aligned} u(t) = & U_{m1} \cos(2\pi \cdot f_1 t - 90^\circ) + \frac{U_{m1}}{3} \cos(2\pi \cdot 3f_1 t - 270^\circ) + \\ & + \frac{U_{m1}}{5} \cos(2\pi \cdot 5f_1 t - 90^\circ) + \frac{U_{m1}}{7} \cos(2\pi \cdot 7f_1 t - 270^\circ) + \quad (2.12) \\ & + \frac{U_{m1}}{9} \cos(2\pi \cdot 9f_1 t - 90^\circ) + \frac{U_{m1}}{11} \cos(2\pi \cdot 11f_1 t - 270^\circ) + \dots \end{aligned}$$

Эти ряды можно изобразить графически. Основная составляющая и высшие гармоники этого сигнала, входящие в формулу (2.1), показаны на временных диаграммах рис. 2.1, б – д. Другой способ графического изображения составляющих ряда Фурье для сигнала на рис. 2.1, а приведен на рис. 2.8, а – в. Амплитуды гармоник убывают по закону  $1/n$ , где  $n$  – номер гармоники, а фазы гармоник изменяются по закону  $n\varphi_1$ , где  $\varphi_1$  – фаза первой гармоники.

Для смещенной на четверть периода периодической последовательности прямоугольных импульсов (рис. 2.3, а) формула ряда Фурье (2.4) может быть видоизменена, если вспомнить, что знак «минус» перед гармоническим колебанием означает поворот колебания по фазе на  $180^\circ$  (т.е. «переворачивание» колебания):

$$\begin{aligned} u(t) = & U_{m1} \cos 2\pi \cdot f_1 t + \frac{U_{m1}}{3} \cos(2\pi \cdot 3f_1 t - 180^\circ) + \\ & + \frac{U_{m1}}{5} \cos 2\pi \cdot 5f_1 t + \frac{U_{m1}}{7} \cos(2\pi \cdot 7f_1 t - 180^\circ) + \quad (2.13) \\ & + \frac{U_{m1}}{9} \cos 2\pi \cdot 9f_1 t + \frac{U_{m1}}{11} \cos(2\pi \cdot 11f_1 t - 180^\circ) + \dots \end{aligned}$$

Начальные фазы колебаний в ряде (2.13) поочередно принимают значения  $0^\circ$  и  $-180^\circ$ . Графическое изображение ряда (2.13) дано на рис. 2.9, а и б.

<sup>1</sup> Постоянную составляющую можно считать нулевой гармоникой, т.е. гармоникой с номером  $n = 0$ .

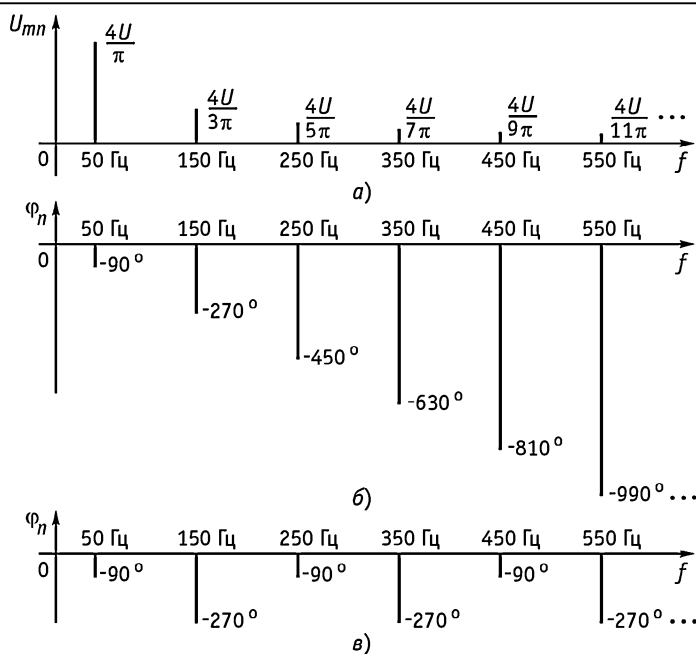


Рис. 2.8. Спектры амплитуд (а) и фаз (б и в) сигнала (2.12)

Вертикальные линии на рис. 2.8 и 2.9 получили название *спектральных линий*, а наборы этих линий, или, что то же, наборы амплитуд  $U_{mn}$  и фаз  $\varphi_n$  гармоник в (2.10), получили название *спектров амплитуд и фаз* данного сигнала.

Таким образом, *спектр амплитуд* – это набор амплитуд гармоник  $U_0, U_{m1}, U_{m2}, U_{m3}, \dots$  (включая постоянную и основную составляющие), входящих в ряд Фурье, записанный в амплитудно-фазовой форме (2.10), а *спектр фаз* – это набор начальных фаз  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  этих гармоник.

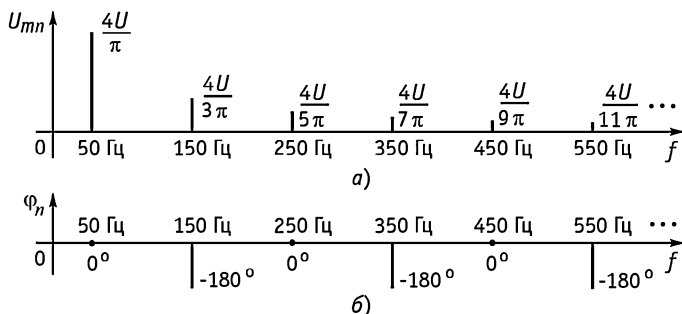


Рис. 2.9. Спектры амплитуд (а) и фаз (б) сигнала (2.13)

**Пример 2.3.** Построим спектр амплитуд и фаз выпрямленного напряжения (строка 5 табл. 2.1), имеющего амплитуду  $U = 10$  В и период  $T = 10$  мс.

Постоянная составляющая

$$U_0 = 2U/\pi = 0,635U = 6,35 \text{ В.}$$

Спектр сигнала (см. табл. 2.1) содержит только четные гармоники, т.к. само колебание является четной функцией. Амплитуды четных гармоник рассчитываются по формуле  $(-1)^{k/2+1} \cdot (1,27U/k^2 - 1)$  и равны соответственно

$$U_{m2} = 4,2 \text{ В}, \quad U_{m4} = 0,8 \text{ В}, \quad U_{m6} = 0,4 \text{ В}, \\ U_{m8} = 0,2 \text{ В и т.д.}$$

Фазы гармоник поочередно принимают значения  $0^\circ$  и  $180^\circ$ .

Частота второй гармоники

$$f_2 = 2 \cdot \frac{1}{T} = 2 \frac{1}{10 \cdot 10^{-3}} = 200 \text{ Гц,}$$

четвертой, шестой и восьмой гармоник:

$$f_4 = 400 \text{ Гц}, \quad f_6 = 600 \text{ Гц}, \quad f_8 = 800 \text{ Гц.}$$

Ряд Фурье, соответствующий выпрямленному напряжению, имеет вид

$$u(t) = 6,35 + 4,2 \cos(2\pi \cdot 200t) + 0,8 \cos(2\pi \cdot 400t + 180^\circ) + \\ + 0,4 \cos(2\pi \cdot 600t) + 0,2 \cos(2\pi \cdot 800t + 180^\circ) + \dots$$

Спектры амплитуд и фаз приведены на рис. 2.10, а и б.

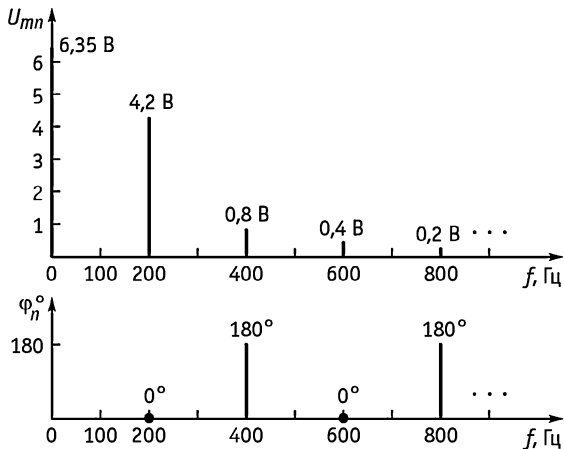


Рис. 2.10. Спектры амплитуд и фаз выпрямленного напряжения

Анализ спектрального (гармонического) состава периодических сигналов – это вычисление амплитуд  $U_{mn}$  и начальных фаз  $\varphi_n$  гармонических составляющих ряда Фурье

Обычно, для вычисления указанных величин используется другая форма записи ряда Фурье, пришедшая из математики, – косинусно-синусная форма:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 + U'_{m1} \cos 2\pi f_1 t + U''_{m1} \sin 2\pi f_1 t + U'_{m2} \cos 4\pi f_1 t + \\ &+ U''_{m2} \sin 4\pi f_1 t + U'_{m3} \cos 6\pi f_1 t + U''_{m3} \sin 6\pi f_1 t + \dots = \quad (2.14) \\ &= U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (U'_{mn} \cos 2\pi n f_1 t + U''_{mn} \sin 2\pi n f_1 t). \end{aligned}$$

Покажем, что форма записи (2.14) эквивалентна форме записи (2.11). Сделаем это с помощью стандартного тригонометрического преобразования:

$$U_{mn} \sin(2\pi n f_1 t + \theta_n) = U_{mn} \sin \theta_n \cos 2\pi n f_1 t + U_{mn} \cos \theta_n \sin 2\pi n f_1 t.$$

Обозначая

$$\boxed{U'_{mn} = U_{mn} \sin \theta_n} \quad \text{и} \quad \boxed{U''_{mn} = U_{mn} \cos \theta_n}, \quad (2.15)$$

приходим к равенству

$$U_{mn} \sin(2\pi n f_1 t + \theta_n) = U'_{mn} \cos 2\pi n f_1 t + U''_{mn} \sin 2\pi n f_1 t. \quad (2.16)$$

Применяя равенство (2.16) к ряду (2.11), сразу же получаем ряд (2.14).

Преобразование (2.16) хорошо иллюстрируется геометрически (рис. 2.11). Слагаемое  $U'_{mn} \cos 2\pi n f_1 t$  представляется вектором с амплитудой

$$U'_{mn} = U_{mn} \sin \theta_n,$$

направленным вдоль положительной вертикальной (т.е. косинусной) оси. Напротив, слагаемое  $U''_{mn} \sin 2\pi n f_1 t$  – вектором с амплитудой

$$U''_{mn} = U_{mn} \cos \theta_n,$$

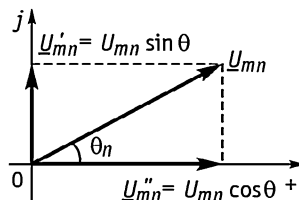


Рис. 2.11. Векторная диаграмма колебания  $U_{mn} \sin(2\pi n f_1 t + \theta_n)$



расположенным вдоль положительной горизонтальной (синусной) оси. Сумма двух векторов дает третий вектор, соответствующий гармоническому колебанию  $U_{mn} \sin(2\pi f_1 t + \theta_n)$ .

**Пример 2.4.** Рассмотрим сигнал, ряд Фурье которого содержит постоянную составляющую, основную составляющую (первую гармонику) с частотой 1 кГц и вторую гармонику с частотой 2 кГц. Синусно-косинусная форма ряда Фурье имеет вид:

$$u(t) = 18 + 40 \cos 2\pi \cdot 1000t - 30 \sin 2\pi \cdot 1000t - 24 \cos 2\pi \cdot 2000t + 10 \sin 2\pi \cdot 2000t.$$

Необходимо представить этот ряд в амплитудно-фазовой форме:

$$u(t) = 18 + U_{m1} \sin(2\pi \cdot 1000t + \theta_1) + U_{m2} \sin(2\pi \cdot 2000t + \theta_2) \quad (2.17)$$

или

$$u(t) = 18 + U_{m1} \cos(2\pi \cdot 1000t - \varphi_1) + U_{m2} \cos(2\pi \cdot 1000t - \varphi_2). \quad (2.18)$$

Представляя гармонические колебания

$$40 \cos 2\pi \cdot 1000t \text{ и } -30 \sin 2\pi \cdot 1000t$$

векторами, направленными вдоль косинусной и синусной осей соответственно (рис. 2.12, а), вычисляем суммарный вектор:

$$\underline{U}_{m1} = -30 + j40 = 50 e^{j126,87^\circ}.$$

Точно так же рассчитываем вектор  $\underline{U}_{m2}$  (рис. 2.12, б), представляющий вторую гармонику:

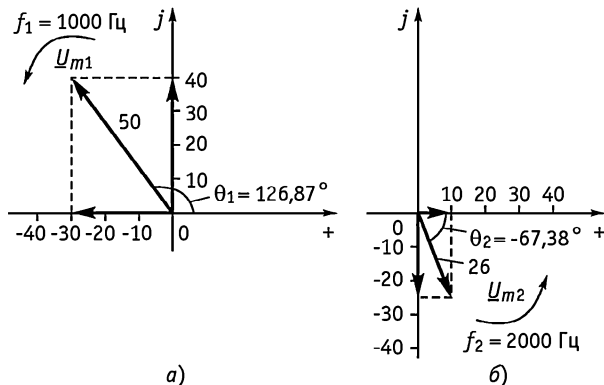


Рис. 2.12. Представление векторов  $\underline{U}_{m1}$  и  $\underline{U}_{m2}$  из примера 2.4

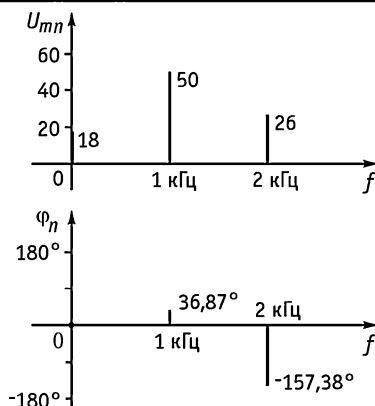


Рис. 2.13. Спектры амплитуд и фаз к примеру

$$\underline{U}_{m2} = 10 - j24 = 26e^{-j67,38^\circ}.$$

В соответствии с равенством (2.16) мы получили углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  и поэтому можем записать амплитудно-фазовую форму (2.17) ряда Фурье:

$$u(t) = 18 + 50 \sin(2\pi \cdot 1000t + 126,87^\circ) + 26 \sin(2\pi \cdot 2000t - 67,38^\circ).$$

Углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в (2.18) отсчитываются от положительной вертикальной (косинусной) оси и получаются путем вычитания  $90^\circ$  из углов  $\theta_1$  и  $\theta_2$ :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 126,87^\circ - 90^\circ = 36,87^\circ \text{ и} \\ \varphi_2 &= -67,38^\circ - 90^\circ = -157,38^\circ. \end{aligned}$$

Таким образом, для формы записи (2.18) имеем

$$u(t) = 18 + 50 \cos(2\pi \cdot 1000t + 36,87^\circ) + 26 \cos(2\pi \cdot 2000t - 157,38^\circ).$$

Поскольку мы договорились, что для изображения спектра сигнала всегда будем использовать выражение (2.10), то можем сказать, что спектр амплитуд в данном случае состоит из трех спектральных линий высотой 18, 50 и 26 единиц (например, милливольт), расположенных на частотах 0, 1 и 2 кГц, а спектр фаз – из двух спектральных линий, высота которых выражена в градусах  $36,87^\circ$  и  $-157,38^\circ$ , на частотах 1 и 2 кГц. Спектр данного сигнала изображен на рис. 2.13.

Из приведенных выше рассуждений следует, что для анализа спектрального состава сигнала достаточно знать, как вычислять величины  $U_0$ ,  $U'_{mn}$  и  $U''_{mn}$  в выражении (2.14). Обратимся к учебникам математики и воспользуемся известными математическими формулами.

Постоянная составляющая ряда  $U_0$  вычисляется, мы уже знаем, как среднее значение функции:

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt. \quad (2.19)$$

Коэффициенты  $U'_{mn}$  и  $U''_{mn}$  вычисляются как средние взвешенные значения с весами  $\sin n\omega_1 t$  и  $\cos n\omega_1 t$  соответственно:

$$U'_{mn} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \cos n\omega_1 t dt; \quad (2.20)$$

$$U''_{mn} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \sin n\omega_1 t dt. \quad (2.21)$$

**Пример 2.5.** Рассмотрим периодическую последовательность прямоугольных импульсов, показанную на рис. 2.4, а:

$$u(t) = \begin{cases} 2U & \text{для } 0 < t < T/2, \\ 0 & \text{для } T/2 < t < T. \end{cases}$$

Она имеет постоянную составляющую, равную в соответствии с (2.19)  $U_0 = U$ . Коэффициенты  $U'_{mn}$  вычисляются по формуле (2.20):

$$\begin{aligned} U'_{mn} &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} 2U \cos 2\pi n f_1 t dt = \frac{4U}{2\pi n f_1 T} \sin 2\pi n f_1 t \Big|_0^{T/2} = \\ &= \frac{4U}{2\pi n f_1 T} \left( \sin \frac{2\pi n f_1 T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{4U}{2\pi n} \sin \pi n = 0 \text{ для всех } n \neq 0. \end{aligned}$$

Здесь было учтено, что  $f_1 = 1/T$ .

Коэффициенты  $U''_{mn}$  вычисляются по формуле (2.21):

$$\begin{aligned} U''_{mn} &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} 2U \sin 2\pi n f_1 t dt = \frac{-4U}{2\pi n f_1 T} \cos 2\pi n f_1 t \Big|_0^{T/2} = \\ &= \frac{-4U}{2\pi n} \left( \cos \frac{2\pi n f_1 T}{2} - 1 \right) = \frac{2U}{\pi n} (1 - \cos \pi n). \end{aligned}$$

Выражение  $\cos \pi n$  удовлетворяет соотношению

$$\cos \pi n = \begin{cases} -1 & \text{для нечетных } n, \\ +1 & \text{для четных } n. \end{cases}$$

Поэтому

$$U''_{mn} = \begin{cases} 4U/(\pi n) & \text{для нечетных } n, \\ 0 & \text{для четных } n. \end{cases}$$

Синусно-косинусная форма ряда Фурье (2.14) будет содержать только синусоиды с нечетными гармоническими частотами:

$$u(t) = U + \frac{4U}{\pi} \sin 2\pi f_1 t + \frac{4U}{3\pi} \sin 6\pi f_1 t + \frac{4U}{5\pi} \sin 10\pi f_1 t + \\ + \frac{4U}{7\pi} \sin 14\pi f_1 t + \dots = U + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4U}{n\pi} \sin 2\pi n f_1 t,$$

что, естественно, с точностью до постоянной составляющей  $U$  совпадает с полученным ранее выражением (2.1).

Переход к амплитудно-фазовой форме (2.10) дает

$$u(t) = U + \frac{4U}{\pi} \cos(2\pi f_1 t - 90^\circ) + \\ + \frac{4U}{3\pi} \cos(2\pi \cdot 3 f_1 t - 270^\circ) + \\ + \frac{4U}{5\pi} \cos(2\pi \cdot 5 f_1 t - 450^\circ) + \quad (2.22) \\ + \frac{4U}{7\pi} \cos(2\pi \cdot 7 f_1 t - 630^\circ) + \dots = \\ = U + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4U}{n\pi} \cos(2\pi n f_1 t - n \cdot 90^\circ).$$

Спектр такого сигнала без постоянной составляющей был показан на рис. 2.8.

На спектр сигнала влияют не только форма сигнала, но и его параметры

Лучше всего рассмотреть это влияние на конкретном примере, а проще всего – на примере периодической последовательности прямоугольных импульсов. В достаточно общем случае эта последовательность изображена на рис. 2.14, *a*. Период повторения импульсов обозначен  $T'$ , а отношение периода к длительности импульсов  $t'_n$  называют *скважностью* и обозначают  $q = T'/t'_n$ .

Вычисление коэффициентов ряда Фурье в синусно-косинусной форме по формулам (2.19) – (2.21) приводит нас к записи (см. табл. 2.1):

$$u(t) = U_0 + U_{m1} \cos 2\pi f_1 t + U_{m2} \cos 2\pi \cdot 2 f_1 t + \\ + U_{m3} \cos 2\pi \cdot 3 f_1 t + U_{m4} \cos 2\pi \cdot 4 f_1 t + \dots,$$

где  $U_0 = U/q$  и:

$$U_{mn} = \frac{2U}{q} \frac{\sin(n\pi/q)}{(n\pi/q)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.23)$$

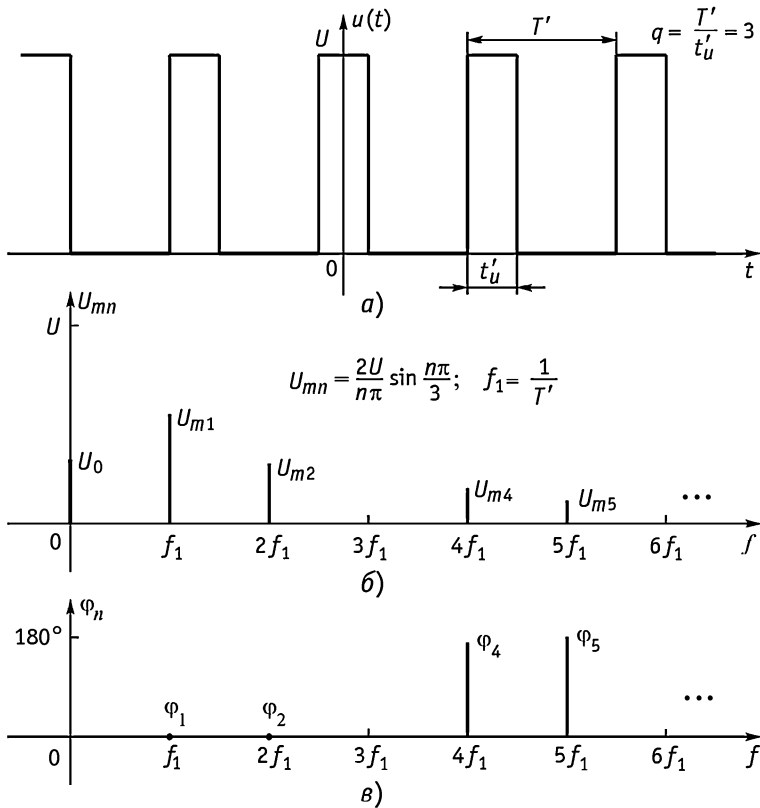


Рис. 2.14. Спектры амплитуд (б) и фаз (в) периодической последовательности импульсов (а) со скважностью  $q = 3$  и периодом  $T'$

Спектр амплитуд такой периодической последовательности со скважностью  $q = 3$  изображен на рис. 2.14, б.

При значениях  $n$ , кратных скважности  $q$  импульсной последовательности, функция  $\sin n\pi/q$  принимает нулевые значения, и гармоники с этими номерами имеют нулевые амплитуды (в нашем примере с  $n = 3, 6, 9, \dots$ ). Частота первой гармоники определяется по формуле:

$$f_1 = 1/T'.$$

Для гармоник с номерами  $n$ , для которых амплитуда  $U_{mn}$  положительная, фазовый угол  $\varphi_n$  равен 0; для гармоник же с номерами  $n$ , для которых величина  $U_{mn}$  окажется отрицательной, фазовый угол принимает значение  $180^\circ$  (рис. 2.14, в).

Рассмотрим влияние на спектр последовательности прямоугольных импульсов таких ее параметров, как период и длительность импульса.

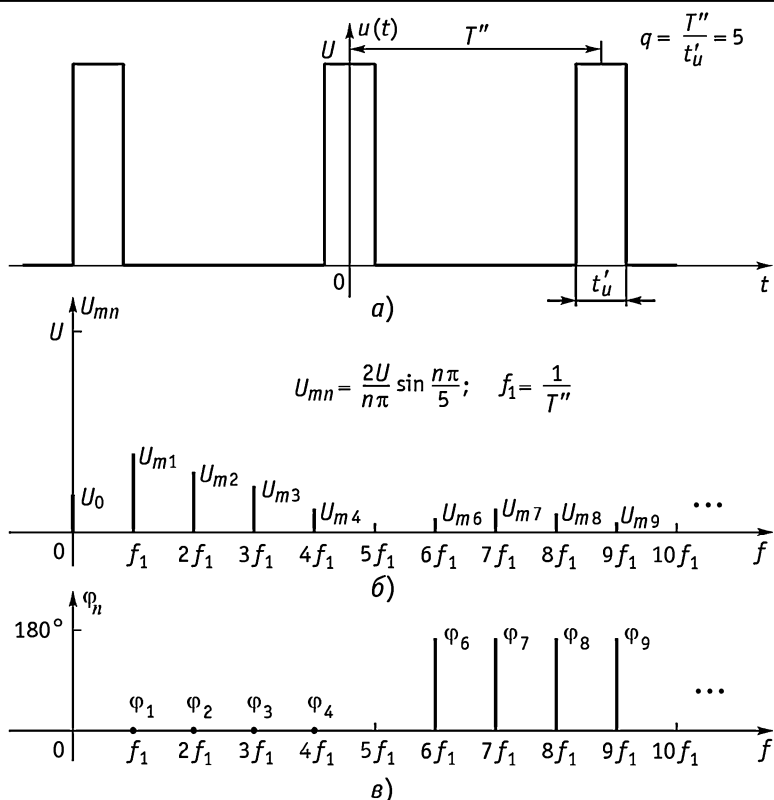


Рис. 2.15. Спектры амплитуд (б) и фаз (в) периодической последовательности импульсов со скважностью  $q = 5$  и периодом  $T''$

От величины периода зависит прежде всего частота основной гармоники, т.е. ее местоположение в спектре. Если мы будем, например, увеличивать период импульсной последовательности (рис. 2.15, а), то частота первой гармоники ( $f_1 = 1/T''$ ) будет уменьшаться. Это приведет к сгущению спектральных линий (рис. 2.15, б и в). Скважность импульсов будет также увеличиваться с ростом периода (в нашем примере  $q = 5$ ), следовательно, обращаться в нуль будут гармоники с более высокими номерами, кратными  $q$  ( $n = 5, 10, 15, \dots$ ). Амплитуды всех гармоник уменьшаются.

С другой стороны, если период последовательности оставлять неизменным (например,  $T'$ ), а длительность импульсов, скажем, уменьшать (например, до величины  $t_u''$ , как на рис. 2.16, а), то первая гармоника не изменит свое местоположение в спектре сигнала. С ростом же скважности в нуль будут обращаться, как и ранее, гармоники с номерами, кратными  $q$  (на рис. 2.16, б с  $n = 5, 10, 15, \dots$ ).

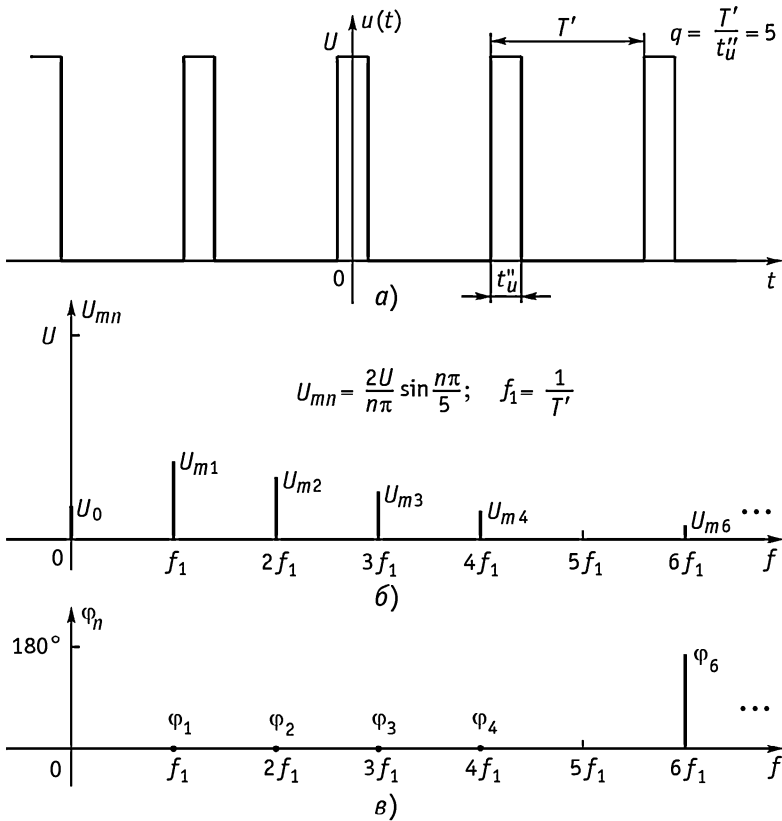


Рис. 2.16. Спектры амплитуд (б) и фаз (в) периодической последовательности импульсов со скважностью  $q = 5$  и периодом  $T'$

На рис. 2.17, а – б показан случай, когда подверглись изменению и период, и длительность импульса. Предлагаем читателям проанализировать данную ситуацию самостоятельно.

Хотя мы проанализировали довольно частные примеры, характерное поведение спектра наблюдается и для других видов периодических импульсных последовательностей. Оно заключается в следующем:

- при увеличении периода последовательности  $T$  частота первой гармоники  $f_1$  уменьшается, и спектральные линии сгущаются; наоборот, при уменьшении периода частота первой гармоники увеличивается, и спектральные линии становятся реже;
- чем короче импульсы в последовательности, тем медленнее убывают с ростом номера  $n$  амплитуды гармоник; наоборот, чем шире импульсы, тем быстрее убывают амплитуды высших гармоник.

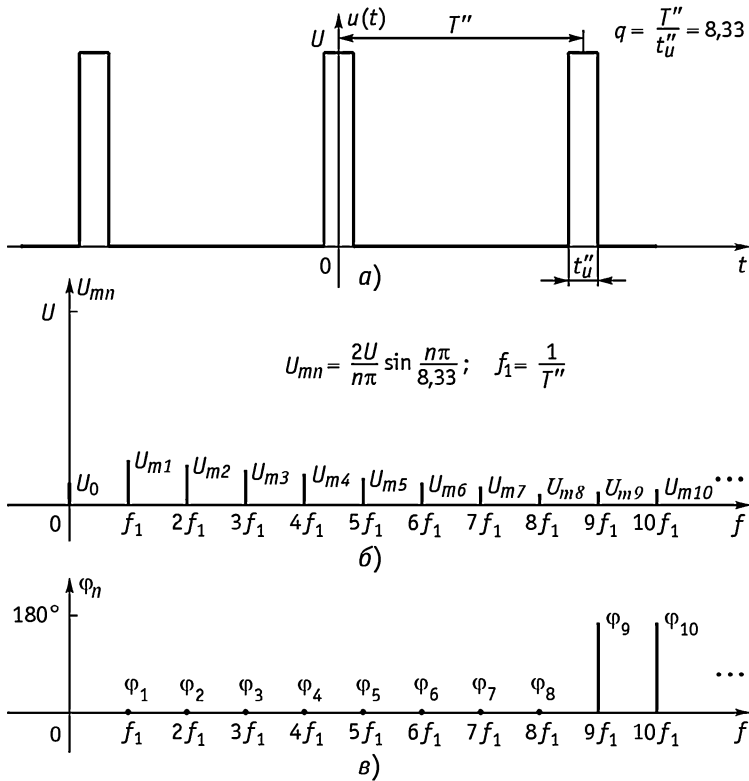


Рис. 2.17. Спектры амплитуд (б) и фаз (в) периодической последовательности импульсов со скважностью  $q = 8,33$  и периодом  $T''$

**Пример 2.6.** Найдем спектр последовательности прямоугольных импульсов, изображенных на рис. 2.18.

Сигнал, изображенный на рис. 2.18, имеет следующие параметры: амплитуда  $U = 10$  В, длительность импульса  $t_n = 10$  мс, период повторения импульсов  $T = 40$  мс, скважность  $q = T/t_n = 4$ . Спектр этого сигнала в синусо-косинусной форме (2.14) имеет вид:

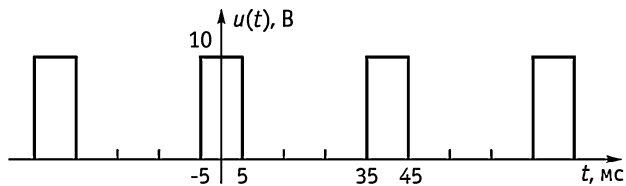


Рис. 2.18. Последовательность прямоугольных импульсов со скважностью  $q = 4$



$$u(t) = U_0 + U_{m1} \cos 2\pi f_1 t + U_{m2} \cos 2\pi \cdot 2 f_1 t + \\ + U_{m3} \cos 2\pi \cdot 3 f_1 t + U_{m4} \cos 2\pi \cdot 4 f_1 t + \dots$$

Постоянная составляющая  $U_0 = U/q = 10/4 = 2,5$  В.

Частота первой гармоники  $f_1 = 1/T = 100$  Гц.

Амплитуды первых шести гармоник, рассчитываемые по формуле (2.23)

$$U_{mn} = \frac{2U}{q} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}}, \quad n=1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

имеют следующие значения:

$$U_{m1} = 4,5 \text{ В}, \quad U_{m2} = 3,18 \text{ В}, \quad U_{m3} = 1,5 \text{ В}, \quad U_{m4} = 0 \text{ В}, \\ U_{m5} = 0,9 \text{ В}, \quad U_{m6} = 1,06 \text{ В}.$$

Фазы 1, 2, 3, 5 гармоник равны  $0^\circ$ , фаза шестой гармоники равна  $180^\circ$ , т.к. при расчете  $\underline{U}_{m6}$  получено отрицательное значение.

Амплитуды и фазы последующих гармоник рассчитываются аналогичным образом. Причем амплитуды гармоник, кратных скважности  $q = 4$ , т.е. 4, 8, 12, 16 гармоник и т.д. равны нулю. Спектры амплитуд и фаз сигнала, изображенного на рис. 2.18, приведены на рис. 2.19.

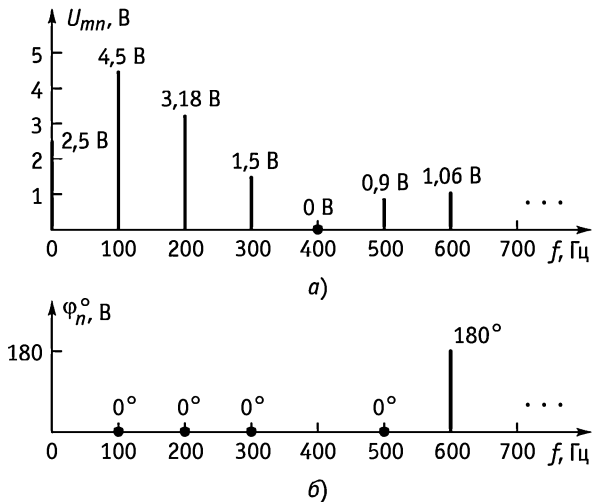


Рис. 2.19. Спектр последовательности прямоугольных импульсов со скважностью  $q = 4$

Чтобы узнать реакцию цепи на периодический сигнал произвольной формы, нужно просуммировать реакции этой цепи на гармонические составляющие сигнала

Пусть к последовательному колебательному контуру подключен источник (генератор), вырабатывающий периодическую последовательность прямоугольных импульсов. Значения элементов последовательного колебательного контура и параметров периодической последовательности импульсов показаны на рис. 2.20.

Спектр амплитуд входной последовательности состоит из постоянной составляющей 2,5 В и гармоник с частотами 1 кГц, 3 кГц, 5 кГц, ..., амплитудами 6,37 В, 2,12 В, 1,27 В, ... (см. первую и вторую строки табл. 2.2).

Напомним, что коэффициент передачи по напряжению цепи на какой-либо частоте вычисляется как отношение амплитуды выходного напряжения на этой частоте к амплитуде входного напряжения на этой же частоте.

Для последовательного колебательного контура коэффициент передачи по напряжению на резисторе  $H_{uR}$  равен:

$$H_{uR} = \frac{U_{mR}}{U_m} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}\right)^2}}. \quad (2.24)$$

Чтобы вычислить амплитуды гармоник напряжения на резисторе, необходимо в соответствии с (2.24) амплитуды гармоник входного напряжения умножить на значения коэффициента передачи для этих гармоник.

Значения коэффициента передачи для последовательного колебательного контура с указанными на рисунке элементами на частотах гармоник даны в третьей строке табл. 2.2.

Колебательный контур настроен в резонанс с частотой:

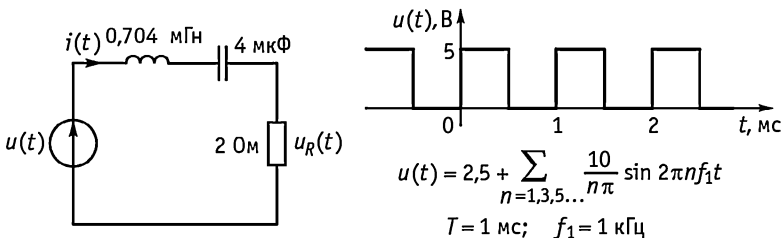


Рис. 2.20. Последовательный колебательный контур и периодическая последовательность импульсов на его входе

Таблица 2.2. Спектр реакции контура на периодический сигнал

$f$	0	1 кГц	3 кГц	5 кГц	...
$U_{m,n}$	2,5 В	3,2 В	1,06 В	0,64 В	...
$H_{uR}$	0	0,056	1	0,14	...
$U_{mR,n}$	0	0,18 В	1,06 В	0,089 В	...

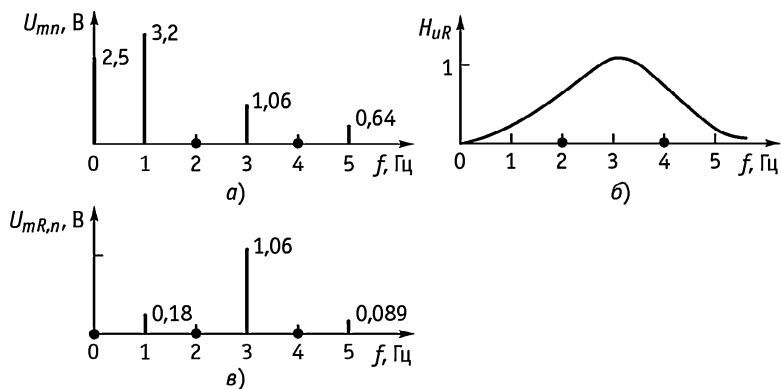


Рис. 2.21. Спектры амплитуд входного (а) и выходного (б) напряжений и амплитудно-частотная характеристика контура

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{6,28\sqrt{0,704 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-6}}} = 3 \text{ кГц}.$$

На частоте резонанса коэффициент передачи по напряжению на резисторе у колебательного контура составляет 1. На частотах, соответствующих 1-ой и 3-ей гармоникам, коэффициент передачи во много раз меньше.

Амплитуды гармоник напряжения на резисторе приведены в последней строке табл. 2.2.

Анализ спектров амплитуд входного и выходного сигналов показывает, что колебательный контур выделил 3-ю гармонику из входной последовательности и подавил остальные гармоники.

Графики спектров амплитуд входного и выходного сигнала, а также амплитудно-частотной характеристики цепи приведены на рис. 2.21.

Существует важное для инженеров понятие – практическая ширина спектра сигнала

Интуитивно ясно, что если полоса пропускания какого-либо устройства недостаточно широкая, чтобы пропустить все гармоники, суще-

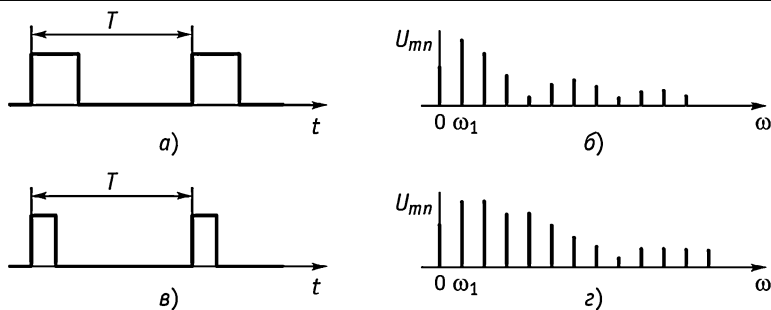


Рис. 2.22. Изменение спектра амплитуд (б и з) при уменьшении длительности импульсов (а и в)

ственно влияющие на форму сигнала, то сигнал на выходе этого устройства исказится. Таким образом, можно сказать, что ширина полосы пропускания устройства не должна быть уже ширины спектра сигнала.

Что же следует считать шириной спектра сигнала, если число гармоник в сигнале бесконечно? Существует несколько критериев для определения практической ширины спектра сигнала. Например, можно отбрасывать все гармоники с амплитудами меньшими 1 % максимальной амплитуды в спектре, тогда частоты оставшихся гармоник и определяют ширину спектра сигнала. Можно отбрасывать те гармоники, суммарная энергия которых меньше 10 % общей энергии сигнала. В этом случае ширину спектра также определяют оставшиеся в сигнале гармоники.

Однако, независимо от критерия, по которому определяют ширину спектра сигнала, можно выделить такие общие для всех сигналов закономерности: *чем круче фронт сигнала, чем короче импульсы и чем больше пауза между импульсами, тем шире во всех этих случаях спектр сигнала, т.е. тем медленнее убывают амплитуды гармоник с ростом их номера* (рис. 2.22).

### Вопросы и задания для самоконтроля

1. На какие составляющие можно разложить любой периодический сигнал? Пояснить по рисункам 2.1 и 2.2.
2. Определить параметры трех синусоид, формирующих последовательность пилообразных импульсов (рис. 2.2, а), имеющих амплитуду  $U = 10$  В и период  $T = 20$  мс.  
 Ответ:  $u_1(t) = 6,35 \sin 100\pi t$ , В;  $u_2(t) = 3,175 \sin(200\pi t + 180^\circ)$ , В;  
 $u_3(t) = 2,177 \sin(300\pi t)$ , В.
3. Почему ряд Фурье пилообразного сигнала, изображенного в строке 2 таблицы 2.1, имеет только косинусоидальные составляющие, а сигнал в строке 3 – только синусоидальные составляющие?

4. Как рассчитываются постоянная составляющая, основная составляющая и высшие гармоники периодического сигнала?
5. Как записывается ряд Фурье в амплитудно-фазовой форме?
6. Что такое спектр периодического сигнала?
7. Рассчитать и построить спектр амплитуд сигнала, изображенного в строке 4 таблицы 2.1, если параметры сигнала  $U = 1$  В,  $T = 1$  мс.  
Указание: решать по аналогии с примером 2.3.
8. В чем суть анализа спектрального состава периодических сигналов?
9. Как изменение параметров периодического сигнала влияет на его спектр? Пояснить на примере изменения длительности импульса последовательности прямоугольных импульсов.
10. Сформулировать алгоритм расчета реакции цепи на периодический сигнал.
11. Рассчитать спектр  $\underline{U}_{mL,n}$  напряжения на индуктивности колебательного контура, изображенного на рис. 2.20. Записать выражение  $u_L(t)$ .  
Ответ:  $u_L(t) = 2,5 + 0,4 \sin(2\pi \cdot 1000t + 177^\circ) + 7,03 \sin(2\pi \cdot 3000t + 90^\circ) + 0,99 \sin(2\pi \cdot 5000t + 8^\circ)$ , В.
12. Что такое практическая ширина спектра сигнала? От чего она зависит?

### 3. Спектры непериодических сигналов

Спектр непериодического сигнала является не дискретным, а непрерывным (сплошным)

Непериодический сигнал легко получить из периодического, увеличивая период вплоть до  $T \rightarrow \infty$  (рис. 3.1, а-г). Спектр амплитуд для сигналов с разными периодами показаны на рис. 3.2, а-в.

При увеличении периода сигнала частота первой гармоники  $\omega_1 = 2\pi/T$  понижается. Спектральные линии становятся гуще. Амплитуды гармоник уменьшаются. Последнее становится понятным, если учесть, что энергия сигнала, оставаясь неизменной, перераспределяется теперь между возросшим числом гармоник. Естественно, доля каждой гармоники в общем сигнале падает.

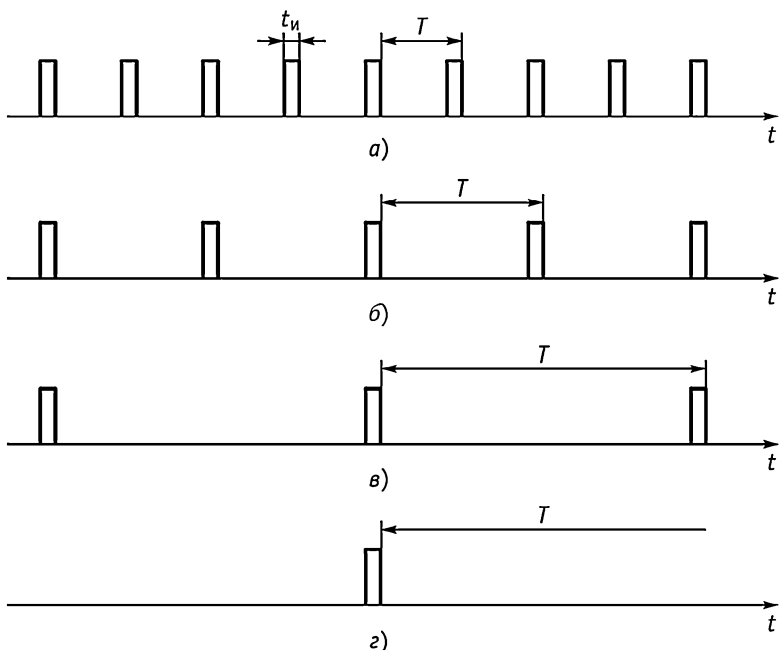


Рис. 3.1. Увеличение периода последовательности прямоугольных импульсов

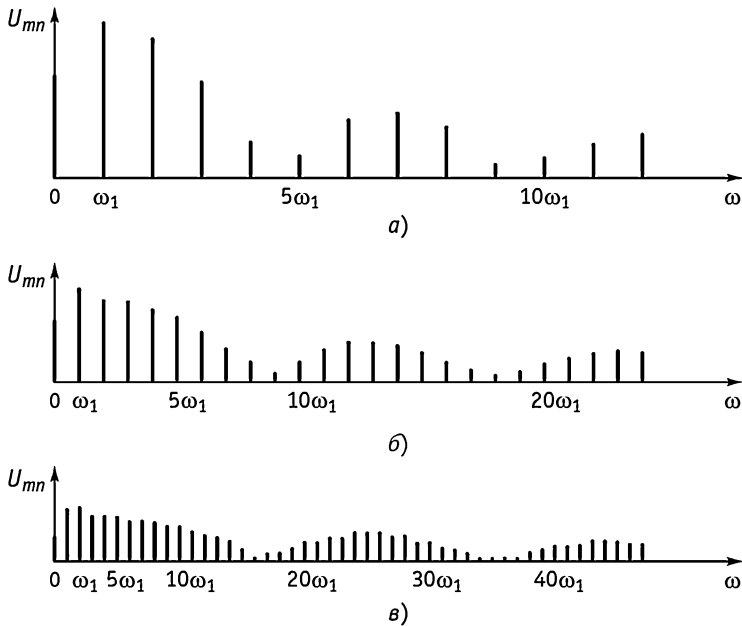


Рис. 3.2. Спектры амплитуд периодических последовательностей импульсов с разными периодами

Следовательно, при переходе к непериодическому сигналу (например, к одиночному импульсу) мы получаем в спектре такого сигнала вместо отдельных гармоник бесконечно большое число синусоидальных колебаний с бесконечно близкими частотами, заполняющими всю шкалу частот. Причем амплитуда каждого такого колебания становится исчезающе малой, потому что на его долю приходится бесконечно малая часть энергии сигнала. Другими словами, в любой бесконечно узкой полосе частот мы всегда обнаружим синусоидальное колебание, правда, бесконечно малой амплитуды.

Поскольку сравнивать между собой бесконечно малые величины неудобно, то вместо амплитуд  $U_{mn}$  по оси ординат откладывают произведение  $U_{mn}T/2$ , которое с увеличением периода  $T$  остается постоянным. В новых координатах спектры, показанные на рис. 3.2, *а–в*, будут выглядеть так, как показано на рис. 3.3, *а–г*. Понятие спектра амплитуд здесь лишено смысла и заменяется понятием *спектральной плотности амплитуд*, которая указывает, по сути, на удельный вес бесконечно малой амплитуды синусоидального колебания в любой бесконечно узкой полосе частот. Понятие спектра фаз заменяется понятием *спектральной плотности фаз*.

Таким образом, спектр непериодического сигнала является в общем случае не дискретным, а непрерывным.

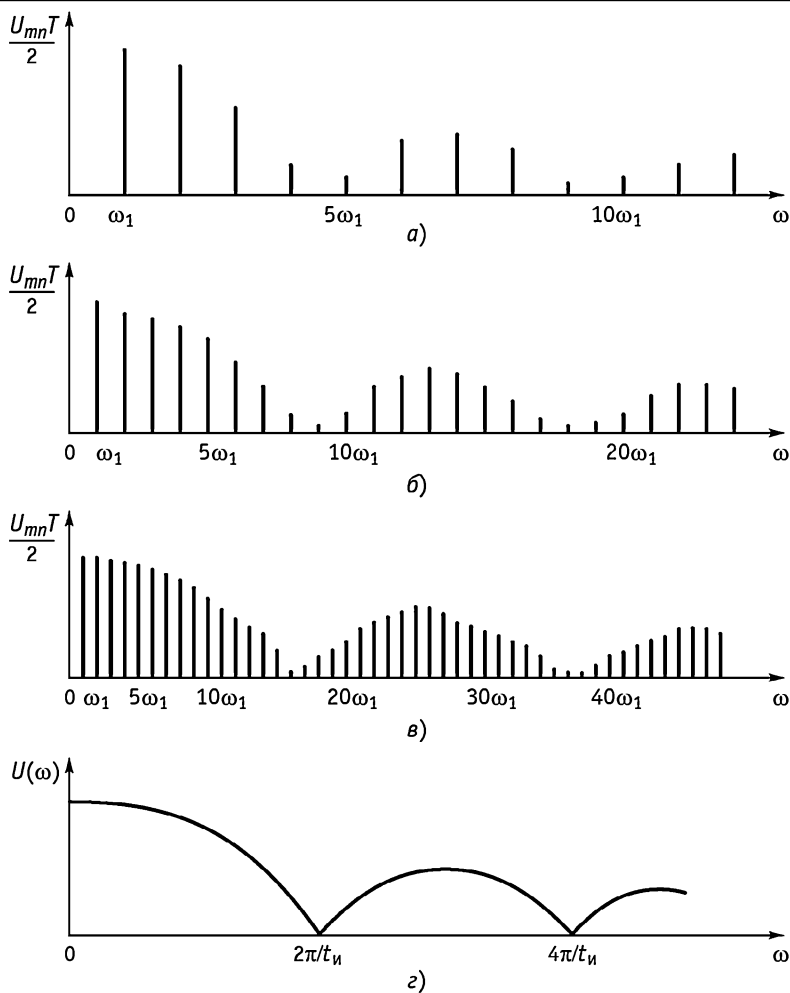


Рис. 3.3. Переход к спектральной плотности (z) одиночного прямоугольного импульса

При устремлении периода последовательности к бесконечности ряд Фурье переходит в интеграл Фурье

Прежде чем мы займемся предельным переходом от ряда Фурье к интегралу Фурье, покажем, что существует математически компактная и удобная для расчетов комплексная форма записи ряда Фурье.

Напомним основную формулу ряда (2.9):



$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos(n\omega_1 t - \varphi_n).$$

Расписывая функцию косинуса по формуле Эйлера

$$\cos(2\pi n f_1 t - \varphi_n) = \frac{1}{2} \left\{ e^{j(n\omega_1 t - \varphi_n)} + e^{-j(n\omega_1 t - \varphi_n)} \right\},$$

мы приходим к другому представлению ряда Фурье:

$$u(t) = U_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} e^{jn\omega_1 t} e^{-j\varphi_n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} e^{-jn\omega_1 t} e^{-j\varphi_n}. \quad (3.1)$$

Обратим внимание на тот факт, что амплитуды спектральных составляющих  $U_{mn}$  являются четными величинами, а фазы  $\varphi_n$  – нечетными. Это означает, что при замене индекса  $n$  на отрицательный индекс  $-n$  имеем  $U_{mn} = U_{m(-n)}$  и  $\varphi_{-n} = -\varphi_n$ .

В последнем слагаемом в (3.1) можно отсчитывать  $n$  не от 1 до  $\infty$ , а от  $-\infty$  до 1. Тогда получим

$$u(t) = U_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{-1} U_{mn} e^{jn\omega_1 t} e^{-j\varphi_n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} e^{jn\omega_1 t} e^{-j\varphi_n}.$$

Чтобы сделать данную запись компактной, обозначим  $U_0 = U_{m0}/2$ , затем объединим все слагаемые под одной суммой, ведя отсчет  $n$  последовательно от  $-\infty$  до  $\infty$ , и обратим внимание на то, что произведение  $U_{mn} e^{-j\varphi_n}$  образует комплексную амплитуду  $\underline{U}_{mn}$ . Это и будет ряд Фурье в комплексной форме:

$$u(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{U}_{mn} e^{jn\omega_1 t}. \quad (3.2)$$

Величина  $\underline{U}_{mn}$ , которая содержит значения и амплитудного и фазового спектров, называется *комплексным спектром* сигнала:

$$\underline{U}_{mn} = U_{mn} e^{-j\varphi_n} = U_{mn} \cos \varphi_n - j U_{mn} \sin \varphi_n = U'_{mn} - j U''_{mn}. \quad (3.3)$$

В соответствии с выражениями (2.20) и (2.21) для  $U'_{mn}$  и  $U''_{mn}$  и с учетом формулы Эйлера перепишем (3.3) в виде

$$\underline{U}_{mn} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (3.4)$$

Формула (3.4) служит для вычисления комплексного спектра сигнала по его временному образу.

Интеграл (3.4) и ряд (3.2) являются парой преобразований, позволяющих найти спектр периодического сигнала и восстановить периодический сигнал по его спектру.

Чтобы получить подобную пару преобразований для непрерывных сигналов, нужно устремить, как мы уже знаем, период  $T$  к бесконечности и совершить в формулах (3.4) и (3.2) предельные переходы.

Введем по аналогии с рис. 3.3 новое обозначение комплексного спектра:

$$U(jn\omega_1) = \frac{U_{mn}T}{2}. \quad (3.5)$$

В этих обозначениях (3.4) и (3.2) переписутся в виде:

$$U(jn\omega_1) = \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (3.6)$$

и

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{U_{mn}T}{2T} e^{jn\omega_1 t} = \frac{\omega_1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(jn\omega_1) e^{jn\omega_1 t}. \quad (3.7)$$

Во втором выражении мы учли, что  $T = 2\pi/\omega_1$ .

Теперь устремим  $T \rightarrow \infty$ . Гармоники будут сгущаться и дискретная частота  $n\omega_1$  перейдет в текущую частоту  $\omega$ , а расстояние от начала координат до частоты первой гармоники  $\omega_1$  будет стремиться к бесконечному малому интервалу  $d\omega$ .

После предельного перехода получим из (3.6) и (3.7):

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.8)$$

и

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.9)$$

Уравнения (3.8) и (3.9) являются основными в теории спектров непрерывных сигналов, причем (3.8) называется *прямым*, а (3.9) – *обратным преобразованием Фурье*.

Если вместо частоты  $\omega$  использовать частоту  $f$ , то эти уравнения примут вид:

$$U(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.10)$$

и

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(jf) e^{j2\pi ft} df. \quad (3.11)$$

Комплексная спектральная плотность

$$U(j\omega) = U(\omega) e^{-j\varphi(\omega)} = U'(\omega) - jU''(\omega) \quad (3.12)$$

содержит в себе сведения о спектральных плотностях амплитуд  $U(\omega)$  и фаз  $\varphi(\omega)$  сигнала, а величины  $U'(\omega)$  и  $U''(\omega)$  определяются формулами:

$$U'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cos \omega t dt; \quad U''(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \sin \omega t dt. \quad (3.13)$$

Рассмотрим физический смысл интеграла Фурье (3.9). Для этого подставим в (3.9) выражение для  $U(j\omega)$  из (3.12):

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{j(\omega t - \varphi)} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \cos(\omega t - \varphi) d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \sin(\omega t - \varphi) d\omega. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $U(\omega)$  – четная, а синус – нечетная функция частоты интеграл от второго слагаемого равен нулю. Следовательно, обратное преобразование Фурье имеет вид

$$u(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} U(\omega) \cos(\omega t - \varphi) d\omega. \quad (3.14)$$

Из (3.14) видно, что непериодический сигнал представляется пределом суммы бесконечно большого числа гармонических колебаний с бесконечно малыми амплитудами  $U(\omega)/\pi$  и начальными фазами  $\varphi = \varphi(\omega)$ . Разность между частотами соседних колебаний бесконечно мала  $\Delta\omega = d\omega$ .

Между спектрами непериодических и периодических сигналов существует связь: модуль спектральной плотности непериодического сигнала и огибающая дискретного спектра периодического сигнала, полученного повторением с периодом  $T$  непериодического сигнала, совпадают по форме и отличаются только масштабом

Из уравнения (3.5)

$$\underline{U}_{mn} = \frac{2}{T} U(jn\omega_1) \quad (3.15)$$

следует, что если периодически повторять одиночный импульс, то амплитуды и фазы получающегося при этом дискретного спектра можно определить, заменив в спектральной плотности  $U(j\omega)$  одиночного импульса текущую частоту  $\omega$  на значения гармоник  $n\omega_1$  и пронормировав эту плотность относительно величины полупериода.

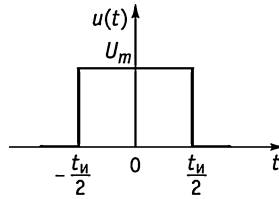


Рис. 3.4. Прямоугольный импульс

Определим спектральную плотность прямоугольного импульса, изображенного на рис. 3.4. Для этого воспользуемся прямым преобразованием Фурье (3.8):

$$\begin{aligned}
 U(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-t_n/2}^{t_n/2} U_m e^{-j\omega t} dt = U_m \left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_{-t_n/2}^{t_n/2} = \\
 &= \frac{2U_m}{\omega} \cdot \frac{e^{j\omega t_n/2} - e^{-j\omega t_n/2}}{2j} = \frac{2U_m}{\omega} \sin \omega \frac{t_n}{2}.
 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Уравнение (3.16) удобнее преобразовать к виду

$$U(j\omega) = U_m t_n \frac{\sin(\omega t_n/2)}{\omega t_n/2}, \quad (3.17)$$

так как это выражение содержит функцию  $\sin \alpha / \alpha$ , поведение которой хорошо известно: эта затухающая функция максимальна и равна 1, когда  $\alpha = 0$ ; она принимает нулевые значения при  $\alpha = \pm n\pi$ .

График спектральной плотности прямоугольного импульса изображен на рис. 3.5. В тех областях частот, где функция  $U(j\omega)$  положительна, спектральная плотность фаз  $\varphi(\omega)$  равна 0; там же, где  $U(j\omega)$  отрицательна, спектральная плотность фаз равна  $\pm 180^\circ$ . поэтому на графиках можно изобразить отдельно спектральную плотность амплитуд  $U(f)$  – модуль  $|U(jf)|$  и спектральную плотность фаз  $\varphi(f)$  (см. рис. 3.6). Частоты  $f$ , на которых спектральная плотность обращается в нуль, можно найти из соотношения  $2\pi f t_n/2 = \pm n\pi$ . Эти частоты равны  $n/t_n$ .

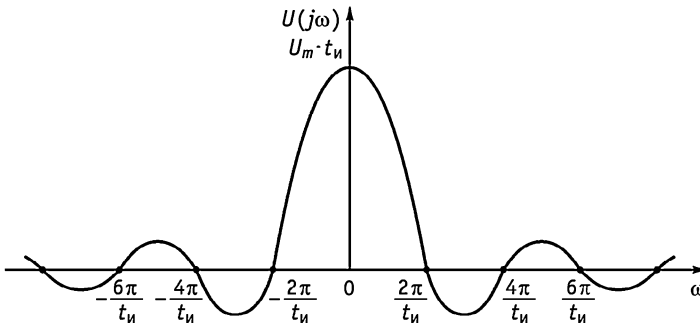


Рис. 3.5. Комплексная спектральная плотность прямоугольного импульса

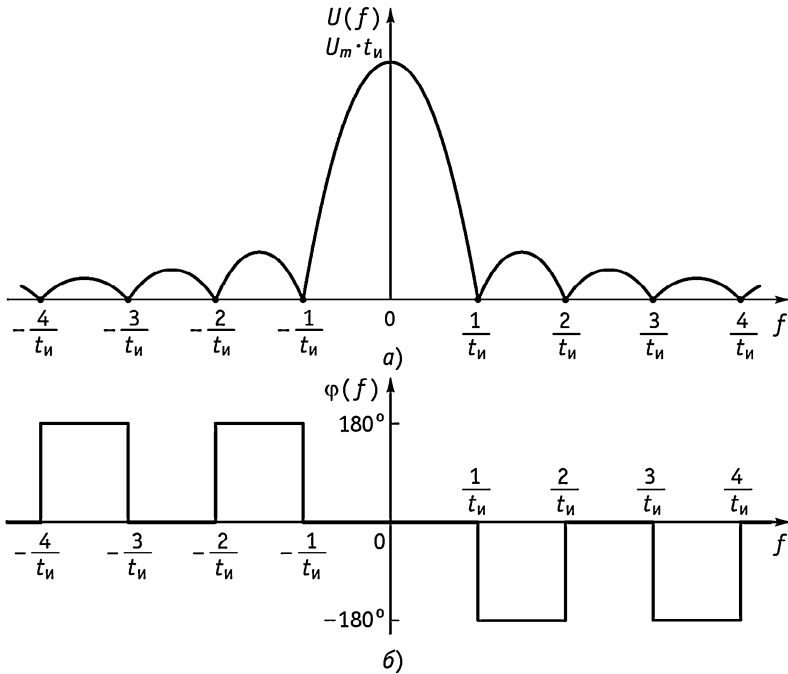


Рис. 3.6. Спектральные плотности (спектры) амплитуд (а) и фаз (б) прямоугольного импульса

Если мы будем периодически с периодом  $T$  повторять импульс на рис. 3.4, то в соответствии с (3.15) можно записать выражение для комплексного спектра  $\underline{U}_{mn}$  периодической последовательности прямоугольных импульсов, вытекающее непосредственно из (3.17):

$$\underline{U}_{mn} = \frac{2U_m t_n}{T} \frac{\sin(n\omega_1 t_n/2)}{n\omega_1 t_n/2}. \quad (3.18)$$

Отношение  $T/t_n$  носит название скважности  $q$  последовательности импульсов. Тогда с учетом того, что  $\omega_1 = 2\pi/T$ , получим

$$\underline{U}_{mn} = \frac{2U_m}{q} \cdot \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q} = \frac{2U_m}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{q}. \quad (3.19)$$

**Пример 3.1.** Рассчитаем и построим график спектральной плотности амплитуд прямоугольного импульса, изображенного на рис. 3.4 и имеющего амплитуду  $U_m = 1$  В, и длительность  $t_n = 10$  мс.

Комплексная спектральная плотность прямоугольного импульса рассчитывается по формуле (3.17) или

$$U(jf) = U_m t_n \frac{\sin(2\pi f t_n/2)}{2\pi f t_n/2}.$$

Спектральная плотность амплитуд – это модуль комплексной спектральной плотности

$$U(f) = U_m t_n \left| \frac{\sin(2\pi f t_n / 2)}{2\pi f t_n / 2} \right|.$$

На частоте  $f=0$  имеем  $U(0) = U_m \cdot t_n = 1 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 10^{-2} \text{ В} = 10 \text{ мВ} \cdot \text{с}$  значение спектральной плотности амплитуд, численно равное площади прямоугольного импульса.

Нули спектральной плотности амплитуд будут на частотах, при которых аргумент синусоидальной функции в формуле для расчета  $U(f)$  обращается в нуль, т.е. определяются из соотношения

$$\frac{2\pi f t_n}{2} = \pm n\pi \quad \text{или} \quad f = \frac{n}{t_n}.$$

Для заданной длительности импульса  $t_n = 10$  мс получаем частоты нулей равными соответственно  $\pm 100$  Гц,  $\pm 200$  Гц,  $\pm 300$  Гц и т.д.

Максимальные значения лепестков спектра, приходящиеся на частоты  $\pm 150$  Гц;  $\pm 250$  Гц;  $\pm 350$  Гц и т.д. рассчитываются по формуле

$$U(f) = \frac{U_m}{\pi f} \sin(\pi f t_n)$$

и равны соответственно 2,1 мВс; 1,3 мВс; 0,91 мВс и т.д.

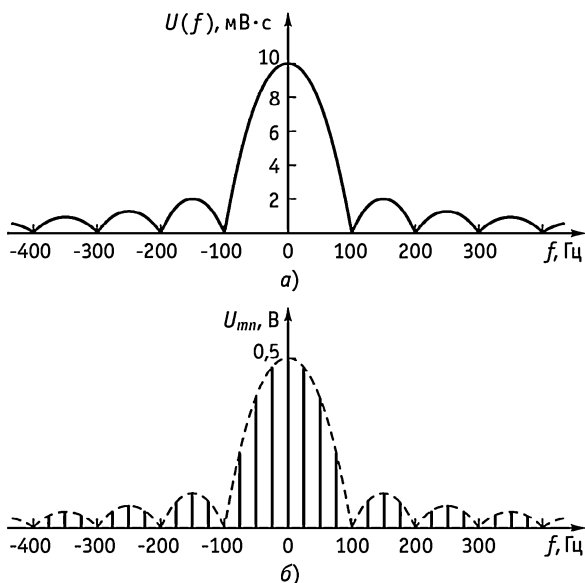


Рис. 3.7. Спектральная плотность амплитуд к примеру 3.1 и спектр амплитуд к примеру 3.2

График спектральной плотности амплитуд  $U(f)$  изображен на рис. 3.7, а.

**Пример 3.2.** Рассчитаем и построим график спектра амплитуд последовательности прямоугольных импульсов, имеющих те же самые параметры импульса, что и в примере 3.1, т.е.  $U_m = 1$  В,  $t_n = 10$  мс, и период повторения  $T = 40$  мс.

Для расчета спектра амплитуд периодической последовательности прямоугольных импульсов воспользуемся формулой (3.19)

$$|\underline{U}_{mn}| = \frac{2U_m}{q} \left| \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q} \right|.$$

Сквозность  $q = T/t_n$  для заданных параметров сигнала равна 4. Подставляя  $U_m = 1$  В и  $q = 4$  в выражение для расчета спектра амплитуд  $|\underline{U}_{mn}|$  получаем

$$|\underline{U}_{mn}| = 0,5 \left| \frac{\sin(n\pi/4)}{n\pi/4} \right|.$$

Из анализа этого выражения для расчета  $|\underline{U}_{mn}|$  следует, что огибающая спектра амплитуд изменяется по такому же закону  $\sin \alpha / \alpha$ , что и спектр амплитуд аналогичного одиночного импульса в примере 3.1. Нули спектра определяются из условия

$$\sin(n\pi/q) = 0,$$

т.е. будут на гармониках, кратных сквозности ( $q = 4$ ). Поскольку частота основной гармоники  $f_1 = 1/T = 1/(40 \cdot 10^{-3}) = 25$  Гц, то нули спектра будут на тех же частотах  $4f_1 = 100$  Гц,  $8f_1 = 200$  Гц,  $12f_1 = 300$  Гц, ..., что и в спектре одиночного импульса.

Постоянная составляющая спектра

$$U(0) = 0,5 \left| \frac{\sin(0 \cdot \pi/4)}{0 \cdot \pi/4} \right| = 0,5 \text{ В.}$$

Сведем расчет спектральных составляющих в табл. 3.1.

Таблица 3.1. Спектр последовательности прямоугольных импульсов

$n$	0	1	2	3	4	5	6
$f$ , Гц	0	25	50	75	100	125	150
$ \underline{U}_{mn} $ , В	0,5	0,45	0,32	0,15	0	0,09	0,11
$n$	7	8	9	10	11	12	
$f$ , Гц	175	200	225	250	275	300	
$ \underline{U}_{mn} $ , В	0,06	0	0,05	0,06	0,04	0	

График спектра амплитуд изображен на рис. 3.7, б.

Сравнивая графики на рис. 3.7, а и 37, б, легко заметить, что спектр непериодического сигнала – дискретный. Дискреты вписываются в огибающую, имеющую такую же форму, что и для непериодического сигнала, но другой масштаб.

Из прямого преобразования Фурье легко определить спектры типовых, часто встречающихся в технике, импульсов

**Импульс включения.** При анализе переходных процессов в электрических цепях используется импульс включения (рис. 3.8), который возникает при подключении к цепи источника постоянного напряжения:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ U_m, & t \geq 0. \end{cases}$$

Строго говоря, эта функция не удовлетворяет условиям интегрирования по Фурье, поэтому воспользуемся следующим приемом: умножим ее на «гасящий» множитель  $e^{-\alpha t}$ , затем после интегрирования перейдем к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ .

$$U(j\omega) = \int_0^{\infty} U_m e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = U_m \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = \frac{1}{\alpha + j\omega}.$$

Совершая предельный переход, получим спектральную плотность импульса включения:

$$U(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j90^\circ}.$$

Спектральная плотность амплитуд при этом равна  $U(\omega) = 1/\omega$ , а спектральная плотность фаз –  $\varphi(\omega) = -90^\circ$ . Графики  $U(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  показаны на рис. 3.9.

**$\delta$ -импульс.** Этот импульс является математической моделью очень узкого и большого по амплитуде импульса (рис. 3.10, а):

$$u(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

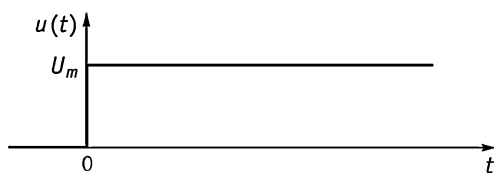


Рис. 3.8. Импульс включения



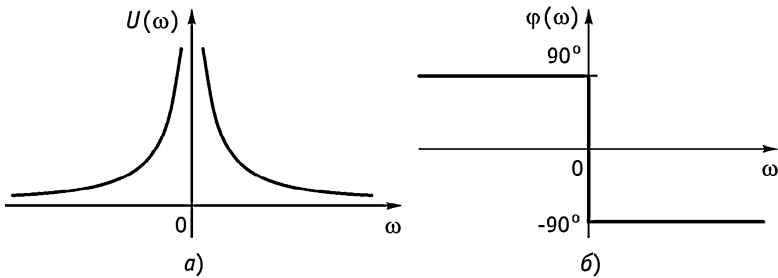
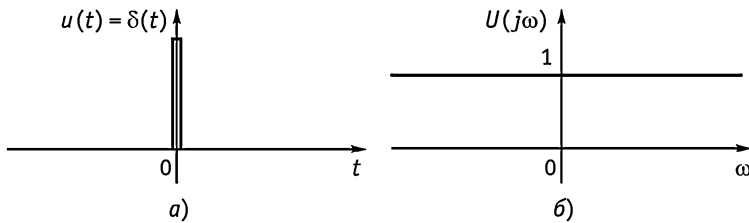


Рис. 3.9. Спектры амплитуд (а) и фаз (б) импульса включения

Рис. 3.10.  $\delta$ -импульс (а) и его спектр

Для нахождения спектра  $\delta$ -импульса воспользуемся прямым преобразованием Фурье

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \sin \omega t dt.$$

Так как второе слагаемое равно нулю (в силу нечетности подынтегрального выражения), то

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cos \omega t dt. \quad (3.21)$$

С учетом свойства (3.20)  $\delta$ -импульса подынтегральное выражение существует только при  $t = 0$ , а это означает, что  $U(j\omega) = 1$ . График спектра  $\delta$ -импульса приведен на рис. 3.10, б.

**Постоянное напряжение**  $U_m = 1$  В, существующее во все моменты времени, а не только при  $t \geq 0$ , имеет спектр (рис. 3.11):

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_m e^{-j\omega t} dt = \pi \delta(\omega).$$

Таким образом, спектр постоянного напряжения равен нулю на всех частотах, кроме  $\omega = 0$ , где  $U(j\omega)$  обращается в бесконечность.

**Экспоненциальный импульс.** Переходные процессы в цепях с одним реактивным элементом описываются экспоненциальной функцией (рис. 3.12, а)

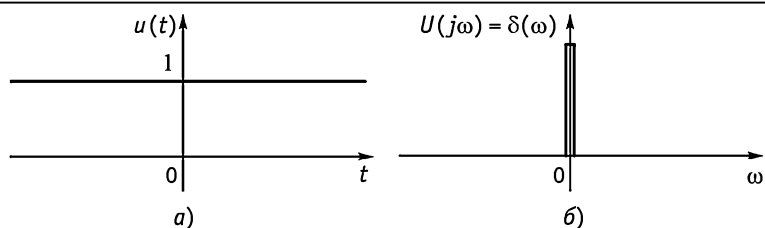


Рис. 3.11. Постоянное напряжение (а) и его спектр (б)

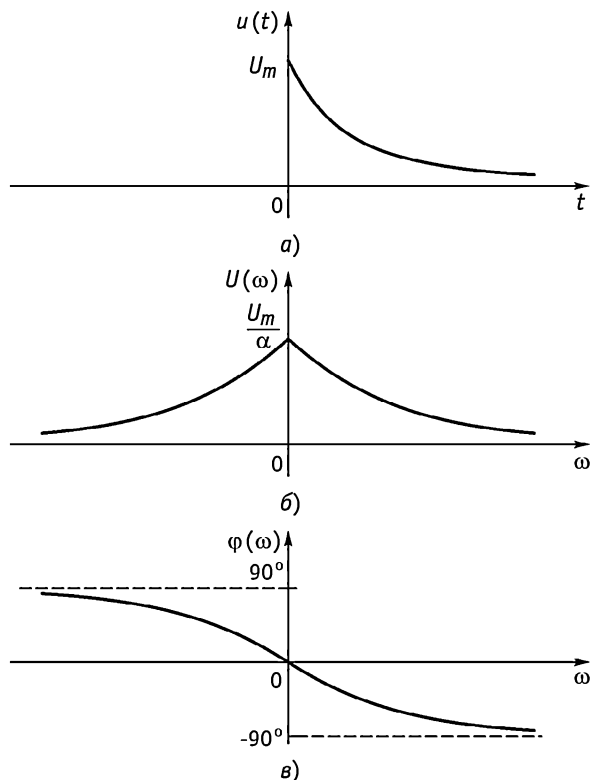


Рис. 3.12. Экспоненциальный импульс (а) и его спектры амплитуд (б) и фаз (в)

$$u(t) = U_m e^{-\alpha t}, \text{ при } t \geq 0.$$

Спектральная плотность этого импульса равна

$$U(j\omega) = \int_0^{\infty} U_m e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{U_m}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega}{\alpha}},$$

где спектр амплитуд

$$U(\omega) = \frac{U_m}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}},$$

а спектр фаз

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega/\alpha).$$

Графики  $U(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  показаны на рис. 3.12, б и в.

Для вычисления спектров при различных преобразованиях сигналов можно воспользоваться теоремами о спектрах

**Спектр суммы сигналов** (теорема линейности). Если сигналы, спектры которых известны, суммируются, то для вычисления результирующего спектра можно воспользоваться теоремой линейности: *спектр суммы сигналов равен сумме спектров этих сигналов.*

Итак, когда

$$u(t) = a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t) + \dots + a_n u_n(t),$$

то

$$U(j\omega) = a_1 U_1(j\omega) + a_2 U_2(j\omega) + \dots + a_n U_n(j\omega).$$

**Сдвиг сигнала во времени** (теорема запаздывания). Часто при обработке сигнала приходится осуществлять его задержку на время  $t_0$ :

$$u(t) = u_1(t - t_0).$$

В этом случае спектр задержанного сигнала умножается на множитель  $e^{-j\omega t_0}$ :

$$U(j\omega) = U(\omega) e^{-j\varphi} = U_1(j\omega) e^{-j\omega t_0} = U_1(\omega) e^{-j(\omega t_0 - \varphi_1)}.$$

*При запаздывании сигнала на время  $t_0$  его спектральная плотность амплитуд остается неизменной, а спектральная плотность фаз изменяет свой наклон на величину  $\omega t_0$ .*

**Пример 3.3.** Определим спектральные плотности амплитуд и фаз прямоугольного импульса изображенного на рис. 3.13, а.

Прямоугольный импульс, изображенный на рис. 3.13, а задержан на время, равное половине длительности импульса  $t_n/2$ , по сравнению с исходным импульсом на рис. 3.4.

По теореме запаздывания комплексная спектральная плотность  $U(j\omega)$  такого задержанного сигнала отличается от спектральной плотности (3.17) исходного сигнала на величину  $e^{-j\omega t_n/2}$ :

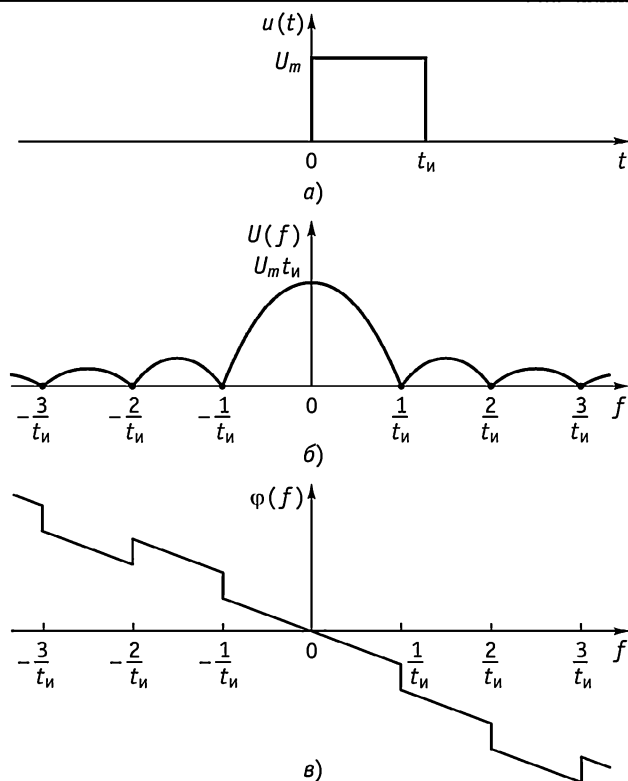


Рис. 3.13. Прямоугольный импульс (а) и его амплитудный (б) и фазовый (в) спектры

$$U(j\omega) = U_m \cdot t_n \frac{\sin \frac{\omega t_n}{2}}{\omega t_n / 2} e^{-j \frac{\omega t_n}{2}}.$$

Спектральная плотность амплитуд задержанного импульса

$$U(\omega) = U_m t_n \left| \frac{\sin \frac{\omega t_n}{2}}{\omega t_n / 2} \right|.$$

рассчитывается по такой же формуле, что и для исходного сигнала.

Графики спектральных плотностей амплитуд обоих сигналов одинаковы (рис. 3.13, б и 3.6, а).

Спектральная плотность фаз  $\varphi(\omega)$  задержанного импульса рассчитывается по формуле

$$\varphi(\omega) = \arg\left(\sin \frac{\omega t_n}{2}\right) - \frac{\omega t_n}{2},$$

где  $\arg(\sin(\omega t_n/2))$  – аргумент синусоидальной функции, который равен нулю, когда  $\sin(\omega t_n/2)$  имеет положительное значение или  $180^\circ$ , когда синус отрицателен.

График  $\varphi(\omega)$  изображен на рис. 3.13, в. Сравните его с аналогичным графиком исходного импульса, изображенным на рис. 3.6, б.

**Дифференцирование и интегрирование сигнала.** Если сигнал  $u_1(t)$  подвергается дифференцированию

$$u(t) = \frac{d}{dt} u_1(t),$$

то его спектр умножается на оператор  $j\omega$ :

$$U(j\omega) = j\omega U_1(j\omega) - u_1(0),$$

где  $u_1(0)$  – значение сигнала  $u_1(t)$  в момент времени  $t = 0$ .

При интегрировании сигнала

$$u(t) = \int_{-\infty}^t u_1(t) dt$$

его спектр делится на  $j\omega$ :

$$U(j\omega) = \frac{1}{j\omega} U_1(j\omega).$$

**Пример 3.4.** Найдем комплексную спектральную плотность сигнала, полученного при дифференцировании экспоненциального импульса  $u_1(t) = U_m e^{-\alpha t} = 1e^{-10^2 t}$  В ( $t \geq 0$ ).

Ранее мы нашли, что комплексная спектральная плотность  $U_1(j\omega)$  экспоненциального импульса  $u_1(t)$  имеет вид

$$U_1(j\omega) = \frac{U_m}{\alpha + j\omega} = \frac{1}{100 + j\omega}.$$

Дифференцированный сигнал  $u_1(t)$

$$u(t) = -\alpha U_m e^{-\alpha t}$$

имеет спектр  $U(j\omega)$ , который отличается от  $U_1(j\omega)$  на множитель  $j\omega$  и учитывает значение  $u_1(0)$

$$U(j\omega) = j\omega \cdot U_1(j\omega) - u_1(0) = \frac{j\omega \cdot U_m}{\alpha + j\omega} - U_m = \frac{-U_m \alpha}{\alpha + j\omega} = \frac{-100}{100 + j\omega}.$$

Проверим правильность вычисления спектра  $U(j\omega)$  дифференцированного сигнала  $u(t)$ , используя для расчета прямое преобразование Фурье (3.8). Получаем

$$\begin{aligned}
 U(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} -\alpha U_m e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \frac{-\alpha U_m}{-(\alpha + j\omega)} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{-\alpha U_m}{\alpha + j\omega} = \frac{-100}{100 + j\omega}
 \end{aligned}$$

то же самое выражение, что и при использовании теоремы дифференцирования.

**Изменение масштаба сигнала** (теорема подобия). Пусть сигнал  $u_1(t)$  имеет спектр  $U_1(j\omega)$ . Изменение масштаба по шкале времени

$$u(t) = u_1(at)$$

приводит к изменению масштаба спектра по шкале частот:

$$U(j\omega) = \frac{1}{a} U_1\left(\frac{j\omega}{a}\right).$$

*Сжатие сигнала во времени приводит к расширению его спектра и напротив, растяжение сигнала – к сужению спектра, другими словами, чем короче импульс, тем шире его спектр.*

**Пример 3.5.** Построим графики спектральных плотностей амплитуд прямоугольных импульсов, имеющих одинаковую амплитуду  $U_m$ , но разные длительности: а)  $t_n$ , б)  $2t_n$ , в)  $0,5t_n$  (рис. 3.14).

Спектральная плотность амплитуд изменяется в соответствии с (3.17) по закону  $|\sin \alpha / \alpha|$ :

$$U(\omega) = U_m t_n \left| \frac{\sin \frac{\omega t_n}{2}}{\frac{\omega t_n}{2}} \right|.$$

- а) Для сигнала, имеющего параметры  $U_m, t_n$  значение спектральной плотности амплитуд  $U(f)$  на нулевой частоте равно площади импульса  $U(0) = U_m t_n$ , а нули функции располагаются на частотах  $f$ , кратных величинам  $1/t_n$ , (рис. 3.14, а).
- б) Увеличение длительности импульса в 2 раза в соответствии с теоремой подобия приводит к увеличению значения  $U(0) = U_m \cdot 2t_n$  и к сужению спектра в 2 раза. Это означает, что нули спектра располагаются на частотах кратных величинам  $1/2t_n$  (рис. 3.14, б).
- в) Уменьшение длительности импульса в 2 раза по сравнению с исходным приводит к уменьшению значения  $U(0) = U_m \cdot t_n / 2$  и к расширению спектра в 2 раза, т.е. нули спектра располагаются на частотах кратных величинам  $1/(2t_n)$  (рис. 3.14, в).

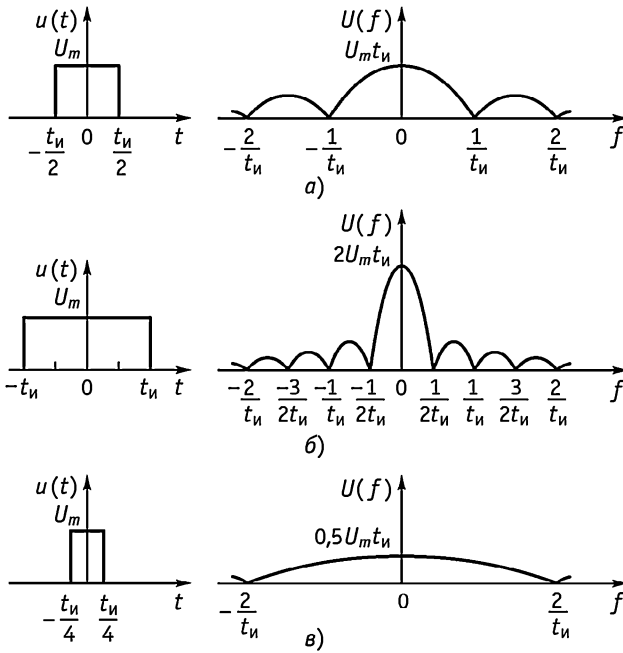


Рис. 3.14. Прямоугольный импульс и его спектр при длительностях импульса  $t_n$  (а),  $2t_n$  (б) и  $0,5t_n$  (в)

**Смещение спектра сигнала** (теорема модуляции). Эта теорема является двойственной (дуальной) по отношению к теореме запаздывания. Если спектр сигнала  $u_1(t)$  сместить по шкале частот на величину  $\omega_0$ , т.е.

$$U(\omega) = U_1(\omega \mp \omega_0),$$

то это соответствует умножению сигнала на комплексную гармонику с частотой  $\omega_0$ :

$$u(t) = u_1(t) e^{\mp j\omega_0 t}.$$

Другими словами, при умножении сигнала на гармоническое колебание с частотой  $\omega_0$  спектр сигнала смещается по шкале частот на величину  $\omega_0$ .

**Пример 3.6.** Найдем спектр радиоимпульса, изображенного на рис. 3.15, б.

Радиоимпульс получается в результате умножения видеоимпульса прямоугольной формы (рис. 3.15, а) и гармонического колебания  $U_m \cos 2\pi f_0 t$

$$u(t) = u_1(t) \cdot U_m \cos 2\pi f_0 t.$$

Представив по формуле Эйлера косинусоидальное колебание как полусумму двух экспонент, получаем

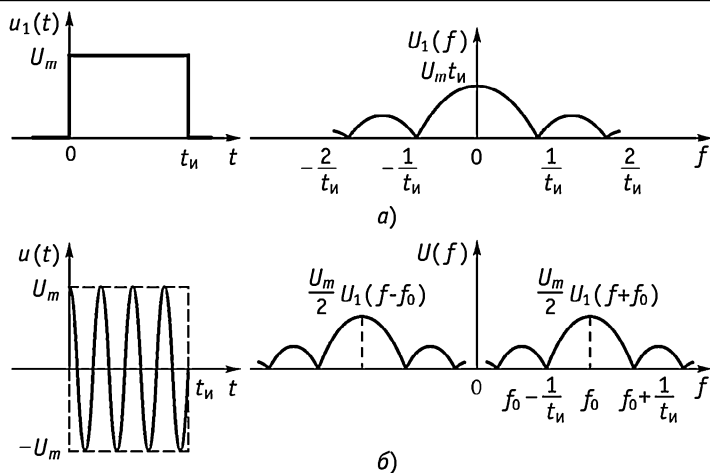


Рис. 3.15. Спектры видеоимпульса (а) и радиоимпульса (б)

$$u(t) = \frac{U_m}{2} u_1(t) e^{j2\pi f_0 t} + \frac{U_m}{2} u_1(t) e^{-j2\pi f_0 t}.$$

Используя теорему смещения, находим комплексную спектральную плотность радиоимпульса

$$U(jf) = \frac{U_m}{2} \{ U_1[j2\pi(f - f_0)] + U_1[j2\pi(f + f_0)] \}.$$

На рис. 3.15, а и 3.15, б изображены спектральные плотности амплитуд видеоимпульса и радиоимпульса. Спектр радиоимпульса представляет собой спектр видеоимпульса, смещенный влево и вправо по оси частот на частоту гармонического колебания  $f_0$ .

**Перемножение двух сигналов** (теорема свертки спектров). *Спектр произведения сигналов соответствует свертке их спектров.* Так, если

$$u(t) = u_1(t) \cdot u_2(t),$$

то

$$U(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_1(j\Omega) U_2(j\omega - j\Omega) d\omega.$$

**Свертка двух сигналов** (теорема о произведении спектров). *Спектр свертки двух сигналов соответствует произведению их спектров.* Так, если

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) u_2(t - \tau) d\tau,$$

то



$$U(j\omega) = U_1(j\omega) \cdot U_2(j\omega).$$

**Пример 3.7.** Вычислим свертку двух экспоненциальных импульсов  $u_1(t) = U_{m1}e^{-\alpha_1 t}$ ,  $u_2(t) = U_{m2}e^{-\alpha_2 t}$  двумя способами: а) прямым нахождением интеграла свертки; б) с помощью теоремы о произведении спектров сигналов.

а) Свертка  $u(t)$  двух сигналов  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) \cdot u_2(t-\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} U_{m1}e^{-\alpha_1 \tau} \cdot U_{m2}e^{-\alpha_2(t-\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

Произведение функций, стоящее под знаком интеграла, отличается от нуля только на интервале  $0 < \tau < t$ , поэтому, изменив пределы интегрирования, получаем

$$u(t) = \frac{U_{m1}U_{m2}}{\alpha_2 - \alpha_1} (e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}).$$

б) Для того, чтобы воспользоваться теоремой о произведении спектров, запишем вначале комплексные спектральные плотности  $U_1(j\omega)$  и  $U_2(j\omega)$  каждой из типовых экспоненциальных функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ .

$$U_1(j\omega) = \frac{U_{m1}}{\alpha_1 + j\omega}, \quad U_2(j\omega) = \frac{U_{m2}}{\alpha_2 + j\omega}.$$

Произведение этих спектров имеет вид

$$U(j\omega) = \frac{U_{m1}U_{m2}}{(\alpha_1 + j\omega)(\alpha_2 + j\omega)}.$$

Сигнал  $u(t)$ , имеющий спектр  $U(j\omega)$ , найдем, взяв обратное преобразование Фурье (3.9):

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{U_{m1}U_{m2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{(\alpha_1 + j\omega)(\alpha_2 + j\omega)} d\omega. \end{aligned}$$

Разложив на простые дроби подинтегральное выражение, получаем

$$u(t) = \frac{U_{m1}U_{m2}}{\alpha_2 - \alpha_1} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\alpha_1 + j\omega} - \frac{1}{\alpha_2 + j\omega} \right) e^{j\omega t} d\omega.$$

Воспользовавшись известной формулой, устанавливающей связь между экспоненциальным импульсом и его комплексной спектральной плотностью, находим

$$u(t) = \frac{U_{m1}U_{m2}}{\alpha_2 - \alpha_1} (e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}),$$

что совпадает с выражением для определения интеграла свертки, рассчитанным прямым путем (а).

Линейные электрические цепи при неперiodическом воздействии рассчитываются теми же частотными методами, что и цепи при гармоническом воздействии

Предположим, задана электрическая цепь, в которой нужно определить реакцию в виде токов  $i_k(t)$  или напряжений  $u_k(t)$  ветвей на неперiodическое воздействие  $u_1(t)$ . Для решения такой задачи необходимо, прежде всего, найти комплексную спектральную плотность воздействия  $U_1(j\omega)$ , воспользовавшись прямым преобразованием Фурье (3.8), и комплексные сопротивления ветвей  $Z_k(j\omega)$ . Теперь можно найти спектральные плотности реакций цепи  $I_k(j\omega)$  или  $U_k(j\omega)$ , применив для расчета любой известный метод: свертывания, наложения, контурных токов, узловых напряжений или эквивалентного генератора. Затем спектры реакций  $I_k(j\omega)$  или  $U_k(j\omega)$  преобразуются в мгновенные значения токов  $i_k(t)$  или напряжений  $u_k(t)$  ветвей с помощью обратного преобразования Фурье (3.9).

**Пример 3.8.** Определим напряжение  $u_R(t)$  на резисторе в схеме, изображенной на рис. 3.16, на вход которой подается импульс включения (рис. 3.17).

Заменим импульс включения его комплексной спектральной плотностью

$$U(j\omega) = U_m / (j\omega),$$

а электрическую цепь на рис. 3.16 представим в виде цепи, изображенной на рис. 3.18.

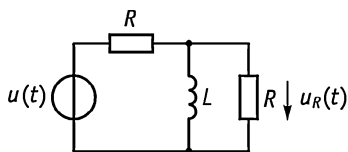


Рис. 3.16. Электрическая цепь с источником неперiodического сигнала

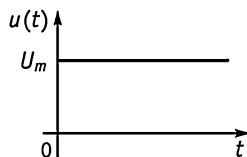


Рис. 3.17. Импульс включения

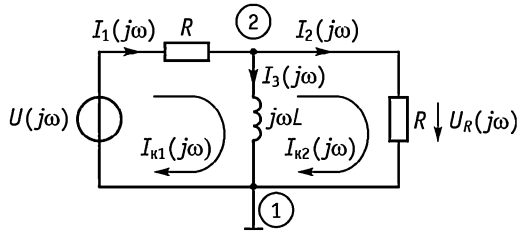


Рис. 3.18. Схема замещения цепи на рис. 3.16

Рассчитаем комплексную спектральную плотность  $U_R(j\omega)$ , используя разные методы расчета электрических цепей.

Воспользуемся методом свертки для расчета комплексной спектральной плотности  $U_R(j\omega)$ . Для этого найдем вначале комплексное сопротивление цепи:

$$Z(j\omega) = R + \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{R^2 + j2\omega LR}{R + j\omega L}.$$

Комплексная спектральная плотность тока  $I_1(j\omega)$  имеет вид

$$I_1(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{Z(j\omega)} = \frac{U_m}{j\omega} \frac{R + j\omega L}{R^2 + j2\omega LR}.$$

Комплексная спектральная плотность напряжения на резисторе рассчитывается по закону Кирхгофа:

$$U_R(j\omega) = U(j\omega) - I_1(j\omega)R = \frac{U_m \cdot L}{R + j2\omega L}.$$

Найдем эту же самую спектральную плотность другим методом.

Согласно методу узловых напряжений для узла (2) (рис. 3.18) имеем уравнение

$$U_2(j\omega) \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R} \right) = U(j\omega) \cdot \frac{1}{R},$$

из которого определяем комплексную спектральную плотность напряжения второго узла:

$$U_2(j\omega) = \frac{U_m}{j\omega} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{j\omega LR}{R + 2j\omega L} = \frac{U_m \cdot L}{R + 2j\omega L}.$$

Из схемы (рис. 3.18) очевидно, что

$$U_R(j\omega) = U_2(j\omega) = \frac{U_m \cdot L}{R + 2j\omega L}.$$

Выражение  $U_R(j\omega)$ , полученное с применением метода узловых напряжений, совпадает с  $U_R(j\omega)$ , полученным методом свертывания.

Предлагаем читателям самостоятельно убедиться, что и метод контурных токов и метод эквивалентного генератора дают то же самое выражение для расчета  $U_R(j\omega)$ .

По известному выражению комплексной спектральной плотности напряжения  $U_R(j\omega)$  можно найти мгновенное значение самого напряжения  $u_R(t)$ , применив преобразование Фурье (3.9):

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Однако, поскольку полученное выражение  $U_R(j\omega)$  после простейшего преобразования приобретает вид

$$U_R(j\omega) = \frac{U_m/2}{R/(2L) + j\omega} = \frac{U_m/2}{\alpha + j\omega}.$$

то нетрудно заметить, что это есть комплексная спектральная плотность экспоненциального импульса, т.е.

$$u_R(t) = \frac{U_m}{2} e^{-\frac{R}{2L}t}.$$

Для определения реакции цепи на воздействие в виде непериодического сигнала можно использовать комплексную передаточную функцию цепи

Комплексная передаточная функция по напряжению – это есть отношение комплексных спектральных плотностей реакции и воздействия в цепи:

$$H_u(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}.$$

Зная комплексную спектральную плотность воздействия  $U_1(j\omega)$  и комплексную передаточную функцию  $H_u(j\omega)$  цепи, легко найти комплексную спектральную плотность  $U_2(j\omega)$  реакции цепи

$$U_2(j\omega) = U_1(j\omega) \cdot H_u(j\omega). \quad (3.22)$$

Все величины в уравнении (3.22) являются комплексными и могут быть записаны в показательной форме

$$U_2(\omega) e^{j\varphi_2(\omega)} = U_1(\omega) e^{j\varphi_1(\omega)} \cdot H_u(\omega) e^{j\varphi_H(\omega)}.$$

При этом уравнение (3.22) можно представить совокупностью двух уравнений

$$U_2(\omega) = U_1(\omega) \cdot H_u(\omega), \quad (3.23)$$

$$\varphi_2(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_H(\omega), \quad (3.24)$$

из которых следует, что *спектральная плотность амплитуд*  $U_2(\omega)$  *реакции цепи равна произведению спектральной плотности амплитуд*  $U_1(\omega)$  *воздействия и АЧХ*  $H_u(\omega)$  *цепи, а спектральная плотность фаз*  $\varphi_2(\omega)$  *реакции цепи равна сумме спектральной плотности фаз*  $\varphi_1(\omega)$  *воздействия и ФЧХ*  $\varphi_H(\omega)$  *цепи.*

После определения комплексной спектральной плотности  $U_2(j\omega)$  реакции цепи по формулам (3.22) или (3.23), (3.24) сама реакция  $u_2(t)$  четырехполосника может быть найдена с помощью обратного преобразования Фурье (3.9) или по таблицам.

Следует отметить, что воздействием или реакцией в цепи могут быть не только напряжения, но и токи. При этом следует использовать комплексную передаточную функцию по току, комплексное сопротивление или проводимость.

**Пример 3.9.** Найдем комплексную спектральную плотность напряжения  $u_R(t)$  в цепи, изображенной на рис. 3.16, при воздействии  $u(t)$  в виде импульса включения (рис. 3.17).

Комплексная спектральная плотность  $U(j\omega)$  импульса включения  $u(t)$ ,

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ U_m, & t \geq 0, \end{cases}$$

как известно, имеет вид

$$U(j\omega) = U_m / (j\omega).$$

Найдем комплексную передаточную функцию  $H_{u_R}(j\omega)$  цепи на рис. 3.16:

$$\begin{aligned} H_{u_R}(j\omega) &= \frac{U_R(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{I(j\omega) \cdot \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L}}{I(j\omega) \left( R + \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} \right)} = \\ &= \frac{j\omega L}{R + j2\omega L}. \end{aligned}$$

Комплексная спектральная плотность  $U_R(j\omega)$  реакции  $u_R(t)$  цепи рассчитывается по формуле (3.22):

$$U_R(j\omega) = U(j\omega) \cdot H_{u_R}(j\omega) = \frac{U_m}{j\omega} \cdot \frac{j\omega L}{R + j2\omega L} = \frac{U_m \cdot L}{R + j2\omega L}.$$

Выражение для расчета  $U_R(j\omega)$  совпадает с формулой комплексной спектральной плотности, полученной при решении ранее той же самой задачи другим способом (см. пример 3.8).

### Вопросы и задания для самоконтроля

1. Пояснить по рис. 3.3 как осуществляется переход от спектра амплитуд последовательности прямоугольных импульсов к спектральной плотности амплитуд одиночного импульса.
2. Как записывается ряд Фурье в комплексной форме?
3. Как перейти от ряда Фурье к интегралу Фурье?
4. Как рассчитывается комплексная спектральная плотность непериодического сигнала?
5. Как связаны спектры непериодических и периодических сигналов?
6. Как рассчитывается спектр прямоугольного импульса?
7. Определить значение спектральной плотности амплитуд прямоугольного импульса с параметрами  $U_m = 2$  В,  $t_n = 10$  мс на частотах  $f_1 = 0$  и  $f_2 = 50$  Гц. На каких частотах спектр имеет нулевые значения? Построить график.

Ответ:  $U(f_1) = 20$ , мВ·с;  $U(f_2) = 12,7$ , мВ·с. Нули – на частотах, кратных 100 Гц.

8. Какие спектры имеют типовые сигналы: импульс включения,  $\delta$ -импульс, экспоненциальный импульс?
9. На примере суммы двух экспоненциальных импульсов проверить теорему линейности.

Указание: Найдите прямое преобразование Фурье сигнала  $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ .

10. Как изменится комплексная спектральная плотность, если сигнал задержан по времени на величину, равную длительности импульса.
11. Каков физический смысл теоремы изменения масштаба?
12. Пояснить теорему смещения спектра сигнала по рис. 3.15.
13. Как рассчитывается реакция цепи на непериодический сигнал?
14. В схеме, изображенной на рис. 3.16 заменить индуктивность  $L$  на емкость  $C$ . Найти комплексную спектральную плотность  $U_R(j\omega)$ , если воздействием является импульс включения (рис. 3.17).

Ответ:  $U_R(j\omega) = \frac{U_m}{-\omega^2 RC + j2\omega}$ .

## 4. Спектральный анализ дискретных сигналов

Дискретный сигнал можно получить из непрерывного, отсчитывая его значения через определенные промежутки времени

Если в цепь микрофона (рис. 4.1), где ток является непрерывной функцией времени, встроить электронный ключ и периодически на короткие мгновения замыкать его, то ток в цепи будет иметь вид узких импульсов с амплитудами, повторяющими форму непрерывного сигнала, и представлять собой ничто иное, как дискретный сигнал (см. рис. 4.1).

Интервал времени  $t_d$ , через который отсчитываются значения непрерывного сигнала, называется *интервалом дискретизации*. Обратная величина  $1/t_d$  (обозначим ее  $f_d$ ) называется частотой взятия отсчетов, или *частотой дискретизации*.

Отсчеты непрерывного сигнала следует брать с такой частотой (или через такой интервал времени), чтобы успевать отследить все, даже самые быстрые, изменения сигнала. Иначе при восстановлении этого сигнала по дискретным отсчетам часть информации будет потеряна и форма восстановленного сигнала будет отличаться от формы исходного (рис. 4.2). Это означает, что звук на приеме будет восприниматься с искажениями.

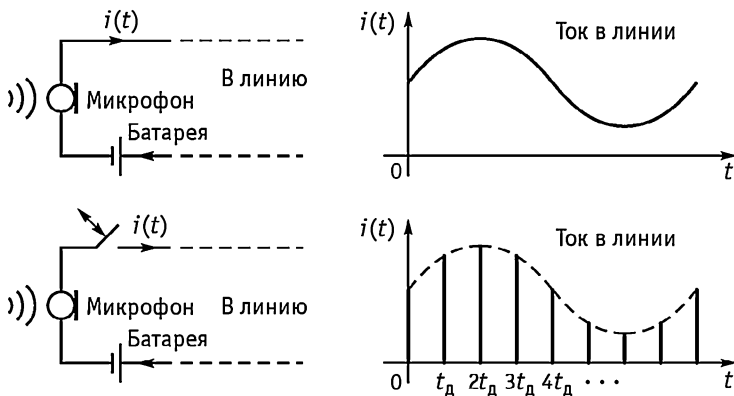


Рис. 4.1. Дискретизация телефонного сигнала

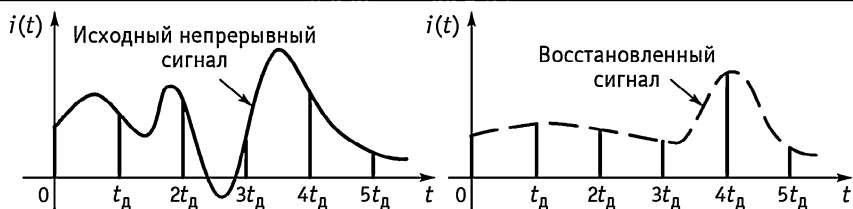


Рис. 4.2. Искажение формы восстановленного сигнала

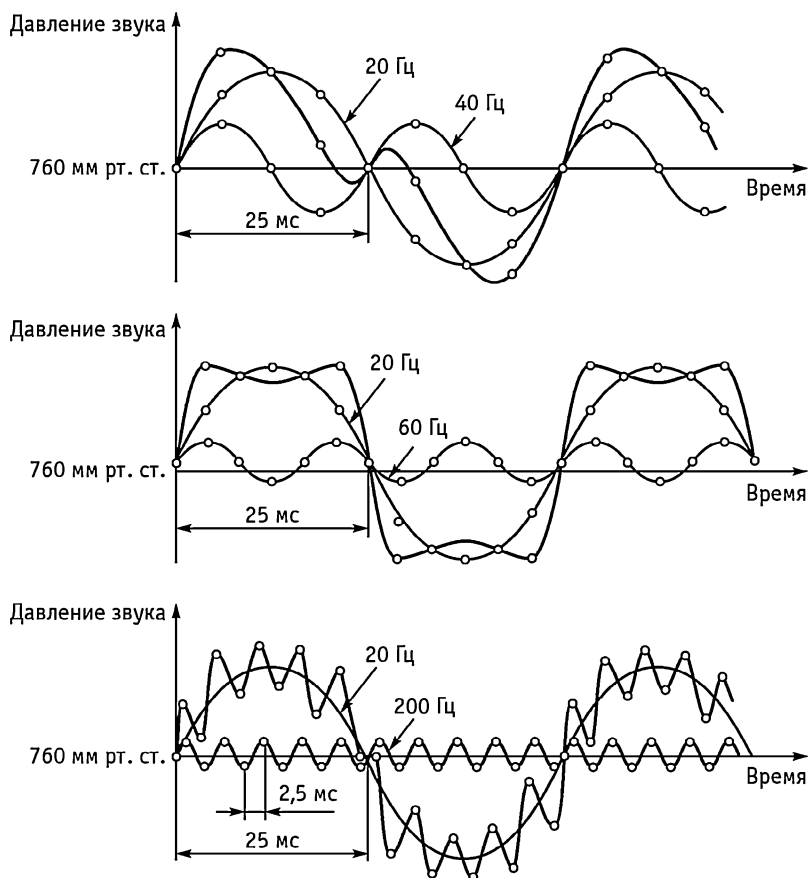


Рис. 4.3. Дискретизация кривых звукового давления при различных частотах колебания струн

Вернемся к колебаниям струны, рассматривавшимся в разделе 1. Чтобы отследить все изменения во времени звукового давления, оказываемого струной, очевидно, достаточно брать отсчетные значения в моменты, соответствующие максимумам и минимумам синусоиды т.е. с



частотой, превышающей по крайней мере вдвое частоту звукового колебания. Например, если струна совершает 20 колебаний/с (частота 20 Гц), то максимальное звуковое давление будет наблюдаться через каждый  $1/20$  с, т.е. через 50 мс. Максимумы и минимумы кривой звукового давления разделены интервалами в 25 мс. Значит, отсчетные значения по кривой должны следовать не реже, чем через 25 мс, или с частотой 40 отсчетов/с (40 Гц). Обычно отсчетные значения на кривой берут «с запасом»: не в 2 раза чаще, чем колеблется звук, а, скажем, в 10 раз. В этом случае они очень хорошо передают форму кривой.

Когда звуковые волны излучают две одновременно колеблющиеся струны, например, как на рис. 4.3, то отследить самые быстрые изменения результирующего звукового давления можно, лишь взяв отсчетные значения с частотой по крайней мере вдвое превышающей частоту колебания второй струны. В варианте на рис. 4.3 частота взятия отсчетных значений должна превышать 400 Гц. Это означает, что отсчетные значения должны следовать не реже, чем через  $1/400 = 0,0025$  с = 2,5 мс, а лучше – еще чаще, например через 0,5 мс.

При изучении речи мы выяснили, что голосовые связки у человека играют роль струн. Самое высокочастотное колебание этих «струн», которое по рекомендации Международного союза электросвязи (МСЭ) необходимо еще учитывать, имеет частоту 3400 Гц. При переходе от аналогового речевого сигнала к цифровому это значение обычно округляют до 4000 Гц. Это значит, что при замене непрерывной кривой электрического тока на выходе микрофона телефонного аппарата отсчетными значениями последние необходимо брать с частотой 8000 Гц или, другими словами, не реже, чем через  $1/8000 = 0,000125$  с = 125 мкс.

Спектр периодического сигнала является дискретным, а спектр дискретного сигнала – периодическим

Комплексная спектральная плотность  $X(jf)$  непрерывного сигнала  $x(t)$  (в дальнейшем для краткости будем говорить: спектр сигнала) вычисляется по формуле прямого преобразования Фурье (3.10)

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt. \quad (4.1)$$

Сигнал  $x(t)$  может быть восстановлен по спектру  $X(jf)$  с помощью обратного преобразования Фурье, или интеграла Фурье

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(jf) e^{j2\pi f t} df. \quad (4.2)$$

В соответствии с принципом неопределенности сигнал, имеющий ограниченную протяженность во времени, обладает неограниченным по полосе спектром (рис. 4.4, а). И наоборот, сигнал с ограниченным спектром имеет бесконечную протяженность во времени (рис. 4.5, а). Как следует из этих рисунков, непрерывный сигнал, и ограниченной и бесконечной протяженности во времени, имеет сплошной спектр.

Если сигнал  $x(t)$  является периодическим, то спектр его – дискретный, т.е. теперь вместо  $X(jf)$  используют отсчеты  $X[n]$ . Эта ситуация показана на рис. 4.4, б. Период сигнала равен длительности сигнала  $T$ . Интервал дискретизации спектра по частоте  $F$  определяется, как известно, периодом сигнала, в данном случае  $F=1/T$ . Формулы для прямого и обратного преобразований Фурье получаются из (4.1) и (4.2) путем замены непрерывной частоты  $f$  на дискретные значения  $nF$ . При этом следует учесть известную связь между амплитудами гармоник  $X[n]$  периодического сигнала и отсчетами  $X(jnF)$  спектральной плотности  $X(jf)$  непрерывного сигнала:

$$X[n] = (1/T)X(jnF).$$

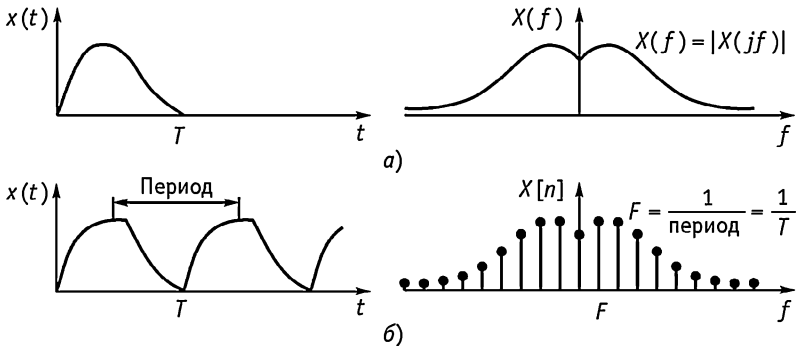


Рис. 4.4. Спектры одиночного (а) и периодического (б) сигналов

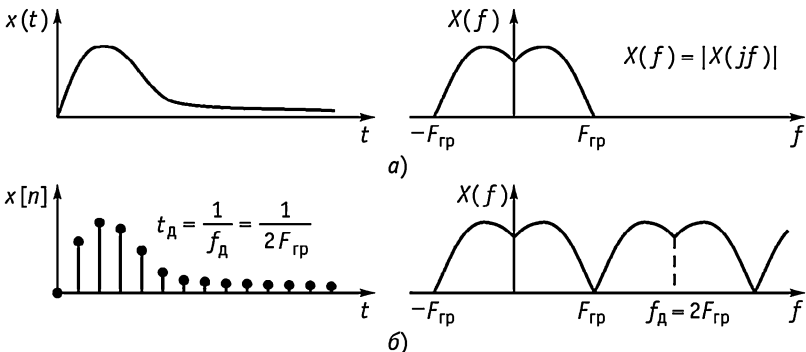


Рис. 4.5. Аналоговый (а) и дискретный (б) сигналы с ограниченным спектром

Спектр  $\underline{X}[n]$  периодического сигнала вычисляется по формуле

$$\underline{X}[n] = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi n F t} dt. \quad (4.3)$$

Сигнал  $x(t)$  можно восстановить по его дискретному спектру, воспользовавшись формулой

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{X}[n] e^{j2\pi n F t}. \quad (4.4)$$

В соответствии с принципом дуальности можно сказать: если периодическим является спектр, то дискретным будет сигнал (рис. 4.5, б). Обозначая период повторения спектра  $f_d$ , получим интервал дискретизации сигнала  $t_d = 1/f_d$ .

Формулы прямого и обратного преобразований Фурье для дискретных сигналов имеют вид

$$X(jf) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi f n t_d}; \quad (4.5)$$

$$x[n] = \frac{1}{f_d} \int_0^{f_d} X(jf) e^{j2\pi f n t_d} dt. \quad (4.6)$$

В формулах (4.5) и (4.6) использовано обозначение  $x[n] = x(nt_d)$ .

**Пример 4.1.** Рассчитаем спектр дискретного сигнала, состоящего из одного отсчета  $x[n] = [a; 0; 0; 0; \dots]$ .

Воспользуемся формулой (4.5), в которую подставим значения  $x[n]$  заданного сигнала

$$X(jf) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi f n t_d} = a e^{-j2\pi f \cdot 0 \cdot t_d} = a.$$

**Пример 4.2.** Рассчитаем спектр экспоненциальной дискретной функции  $x[n] = 0,5^n, n \geq 0$ .

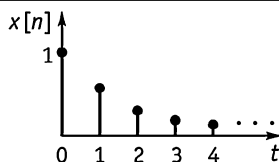
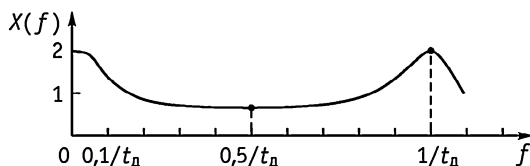
График дискретной функции  $x[n]$  приведен на рис. 4.6, а ее отсчеты можно записать в виде последовательности  $x[n] = \{1; 0,5; 0,25; 0,125; 0,0625; \dots\}$ .

Спектр дискретной экспоненты рассчитаем по формуле (4.5)

$$\begin{aligned} X(jf) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi f n t_d} = \sum_{n=0}^{\infty} 0,5^n e^{-j2\pi f n t_d} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (0,5 e^{-j2\pi f t_d})^n = \frac{1}{1 - 0,5 e^{-j2\pi f t_d}}, \end{aligned}$$

где для суммирования ряда использована формула

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n = 1 + y + y^2 + y^3 + \dots = \frac{1}{1 - y}.$$

Рис. 4.6. Дискретный сигнал вида  $x[n] = 0,5^n$ Рис. 4.7. Спектр амплитуд дискретного сигнала  $x[n] = 0,5^n$ 

Получим выражение для расчета спектра амплитуд  $X(f)$ , используя формулу Эйлера ( $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ ).

$$X(f) = \frac{1}{\sqrt{[1 - 0,5 \cos(-2\pi f t_d)]^2 + [0,5 \sin(-2\pi f t_d)]^2}}$$

Для построения графика будем задавать значения  $f$  от 0 до  $1/t_d$  с шагом  $0,1/t_d$  и рассчитывать  $X(f)$ .

График спектра амплитуд  $X(f)$  экспоненциальной дискретной функции  $x[n] = 0,5^n$  приведен на рисунке 4.7.

Как видно из графика, спектр дискретного сигнала сплошной и периодический с периодом  $f_d = 1/t_d$ .

При слишком редкой дискретизации сигнала происходит наложение на основной спектр «боковых» спектров, что приводит к искажению спектра и невозможности точного восстановления сигнала по его отсчетам

Обратимся вновь к рис. 4.4. В случае, когда дискретизации подвергается спектр (рис. 4.4, б), это приводит к периодическому повторению сигнала. На рис. 4.4, б и 4.8, а, б показаны случаи выбора разных интервалов дискретизации спектров. При слишком редкой дискретизации происходит наложение сигналов из разных периодов друг на друга (рис. 4.8, б). При этом форма импульсов в периодической последовательности будет отличаться от формы одиночного сигнала.

Если дискретизации подвергается сигнал (рис. 4.9, а, б и 4.10, а, б), то периодически повторяется спектр сигнала. При неудачном выборе интервала дискретизации будет иметь место наложение друг на

друга спектров из разных периодов повторения, т.е. искажение формы спектра (рис. 4.9, б и 4.10, б).

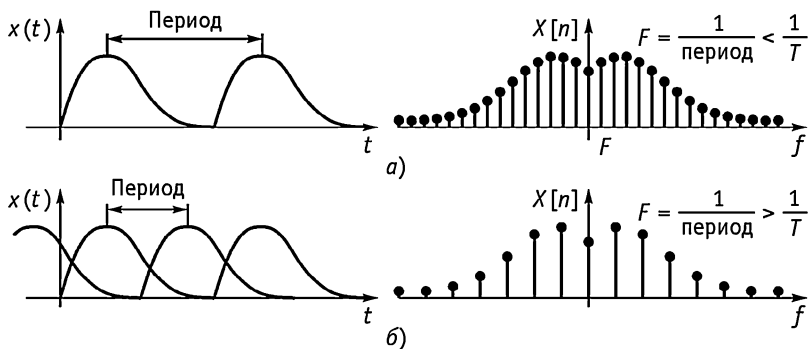


Рис. 4.8. Различные интервалы дискретизации спектров и наложения сигналов

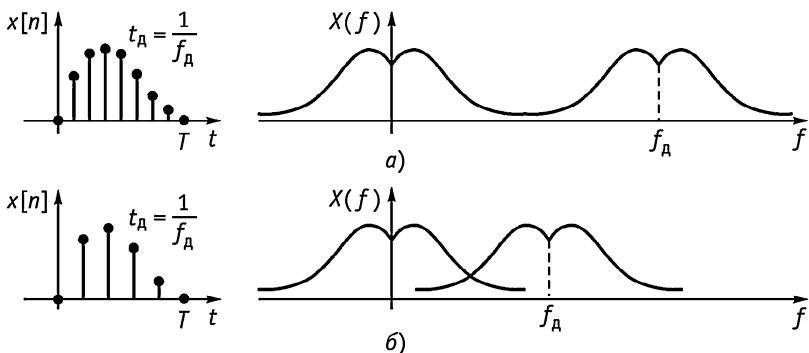


Рис. 4.9. Различные интервалы дискретизации сигналов и наложение спектров

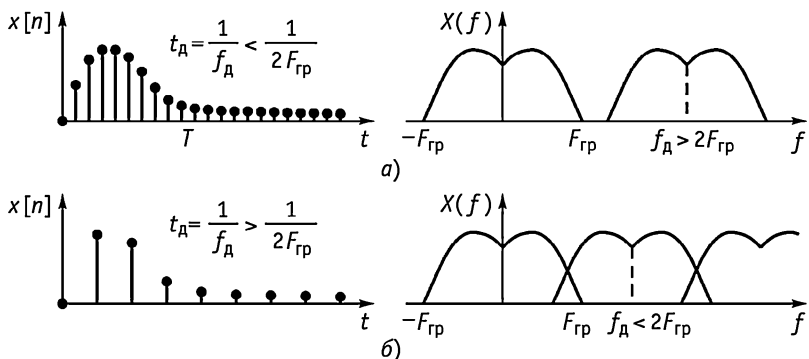


Рис. 4.10. Наложение спектров

Вывод: все наложения (сигналов или спектров) происходят из-за неудачного – слишком редкого – интервала дискретизации (соответственно, спектра или сигнала). Это приводит к появлению ошибок наложения, или, другими словами, искажений формы сигнала (либо спектра) на каждом периоде.

Устройство, восстанавливающее непрерывный сигнал из дискретного, называется интерполятором. Оно по известным (отсчетным) значениям непрерывной функции вычисляет все промежуточные значения. В математике подобная операция называется интерполяцией.

Можно взглянуть на эту проблему и с другой стороны. Спектр дискретного сигнала содержит (в самом первом периоде) спектр исходного, недискретизированного сигнала (рис. 4.5, б, 4.9, а и 4.10, а). Пропустим дискретный сигнал  $x[nT_d]$  через фильтр нижних частот с граничной частотой полосы пропускания  $F_{гр}$ . Такой фильтр подавит все «боковые» спектры и не внесет никаких изменений в «основной» спектр. Значит, на его выходе появится непрерывный сигнал  $x(t)$ . Таким образом, фильтр нижних частот с частотой среза  $F_{гр}$  может играть роль интерполятора.

В 1933 году в работе «О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи» В.А. Котельников доказал теорему, ставшую основополагающей в теории и технике цифровой связи. Она гласит: если непрерывный сигнал  $x(t)$  имеет спектр, ограниченный частотой  $F_{гр}$ , то он может быть полностью и однозначно восстановлен по его дискретным отсчетам, взятым через интервалы времени

$$T = 1/2F_{гр},$$

т.е. с частотой  $f_d = 2F_{гр}$ .

Не приводя полную математическую формулировку теоремы, а также ее доказательство, лишь ограничимся указанием сути теоремы. Однако, справедливость ее легко усматривается из рис. 4.5, б и 4.10, а. Частота дискретизации непрерывного сигнала не должна быть меньше удвоенной ширины спектра:  $f_d \geq 2F_{гр}$  иначе произойдет наложение спектров (рис. 4.10, б) и будет невозможно с помощью фильтра нижних частот выделить спектр исходного непрерывного сигнала.

**Пример 4.3.** Рассчитаем интервал дискретизации и минимально допустимую частоту дискретизации сигнала, спектральная плотность которого равна нулю при значениях частоты выше 100 кГц.

Из условия задачи следует, что граничная частота спектра  $F_{гр}$  равна 100 кГц. Тогда в соответствии с теоремой Котельникова имеем интервал дискретизации

$$t_d = \frac{1}{2F_{гр}} = \frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 10^3} = 5 \text{ мкс.}$$

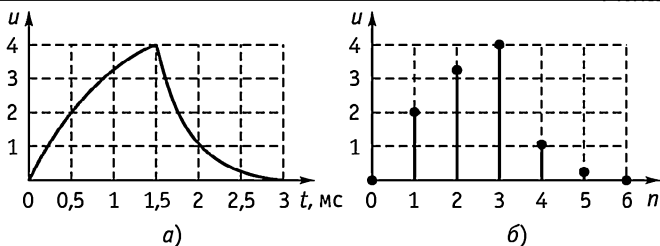


Рис. 4.11. Отсчетные значения (б) сигнала (а) из примера 4.4

Минимально допустимая частота дискретизации  $f_d = 2F_{гр} = 2 \cdot 100 = 200$  кГц.

**Пример 4.4.** Определим дискретные отсчеты сигнала длительностью  $t_n = 3$  мс, приведенного на рис. 4.11, а, если в качестве граничной частоты спектра  $F_{гр}$  принять значение  $3/t_n$ , выше которого все значения спектральной плотности уменьшаются более чем в 10 раз по сравнению с максимальным.

Хотя сигнал конечной длительности имеет бесконечный спектр частот, однако почти всегда можно определить граничную частоту спектра таким образом, чтобы отсекание частот превышающих  $F_{гр}$ , привело к пренебрежимо малым изменениям энергии исходного сигнала. Такое условие задано в примере.

Граничная частота спектра

$$F_{гр} = \frac{3}{t_n} = \frac{3}{3 \cdot 10^{-3}} = 1 \text{ кГц.}$$

Интервал дискретизации

$$t_d = \frac{1}{2F_{гр}} = \frac{1}{2 \cdot 10^3} = 0,5 \text{ мс.}$$

Берем отсчеты сигнала, приведенного на рис. 4.11, а, через интервал времени  $t_d = 0,5$  мс и получаем последовательность  $x[n] = \{0; 2; 3,2; 4; 1; 0,3; 0\}$ , изображенную графически на рис. 4.11, б.

Для расчета спектров дискретных сигналов на компьютерах применяют дискретное преобразование Фурье

Мы уже отмечали, что развитие вычислительной техники привело к появлению цифровых систем обработки сигналов. При этом как сигнал, так и его спектр необходимо перед вводом в вычислительное устройство представлять в виде отсчетов, т.е. в виде чисел.

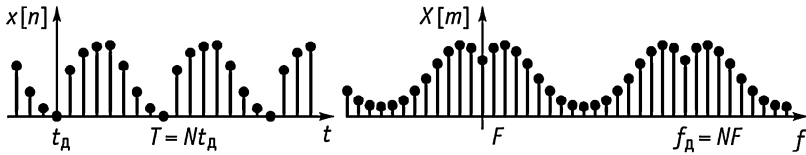


Рис. 4.12. Дискретный сигнал и его дискретный спектр

В формулах (4.3) и (4.4), или (4.5) и (4.6), один из компонентов уже является дискретным. Остается только заменить в этих формулах оставшуюся непрерывную переменную ( $t$  или  $f$ ) дискретными значениями.

Так, например, если в формулах (4.3) и (4.4) время  $t$  заменим на  $nt_d$ , то получим формулы (4.7) и (4.8)

$$\underline{X}[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nm \frac{1}{N}}, \quad (4.7)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \underline{X}[m] e^{j2\pi nm \frac{1}{N}}. \quad (4.8)$$

Следует заметить, что при этом периодический сигнал  $x(t)$  стал дискретным сигналом  $x(nt_d)$ , или  $x[n]$ , а значит дискретный спектр  $\underline{X}[m]$  начал периодически повторяться (рис. 4.12). Суммирование дискретных составляющих спектра  $\underline{X}[m]$  в формуле (4.4) следует теперь вести не в бесконечных пределах, а на периоде, где укладывается  $N$  отсчетов. Значит индекс суммирования  $m$  в формуле (4.8) будет изменяться от  $m = 0$  до  $m = N - 1$ .

На периоде повторения  $T$  дискретного сигнала  $x[n]$  также укладывается  $N$  отсчетов, включая нулевой отсчет. Интеграл в (4.3) заменяется суммой с индексом суммирования  $n$ , изменяющимся от  $n = 0$  до  $n = N - 1$ . Переменная  $dt$  в этой формуле при переходе от интеграла к сумме заменяется на  $t_d$ , так что отношение  $t_d/T = 1/N$ , т.к.  $T = Nt_d$ . Частота дискретизации равна  $f_d = NF$ . Отсюда вытекают соотношения:

$$t_d = \frac{1}{NF} \quad \text{и} \quad F = \frac{1}{Nt_d}. \quad (4.9)$$

Произведение  $Ft_d$  можно заменить величиной  $1/N$ .

Выражения (4.7) и (4.8) называются *прямым и обратным дискретным преобразованием Фурье* (ДПФ).

**Пример 4.5.** Рассчитаем ДПФ дискретного периодического сигнала, заданного тремя отсчетами  $x[n] = \{0; 1; 2\}$ .

Для расчета воспользуемся формулой ДПФ (4.7).

$$\begin{aligned} \underline{X}[0] &= \left\{ x[0] e^{-j2\pi \cdot 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3}} + x[1] e^{-j2\pi \cdot 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3}} + x[2] e^{-j2\pi \cdot 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3}} \right\} = \\ &= [0 + 1 + 2] = 3; \end{aligned}$$



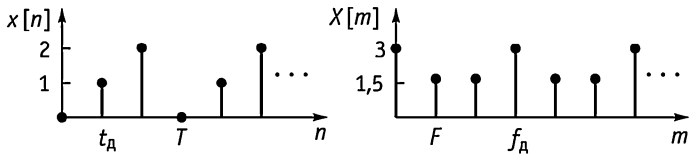


Рис. 4.13. Дискретные сигнал и спектр из примера 4.5

$$\begin{aligned} \underline{X}[1] &= \left\{ x[0]e^{-j2\pi \cdot 0 \cdot \frac{1}{3}} + x[1]e^{-j2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}} + \right. \\ &\quad \left. + x[2]e^{-j2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}} \right\} = [0 + 1e^{-j120^\circ} + 2e^{-j240^\circ}]; \\ \underline{X}[2] &= [0e^{-j0^\circ} + 1e^{-j240^\circ} + 2e^{-j480^\circ}]. \end{aligned}$$

Поскольку

$$e^{-j120^\circ} = e^{-j480^\circ} = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e^{-j240^\circ} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2},$$

то

$$\underline{X}[1] = \frac{1}{2}(-3 + j\sqrt{3}) = 1,74 e^{j150^\circ},$$

$$\underline{X}[2] = \frac{1}{2}(-3 - j\sqrt{3}) = 1,74 e^{j210^\circ}.$$

Графики заданного дискретного периодического сигнала  $x[n]$  и рассчитанного дискретного периодического спектра амплитуд  $X[m]$  приведены на рис. 4.13.

**Пример 4.6.** Рассчитаем значения дискретного сигнала  $x[n]$ , ДПФ которого имеет вид  $\underline{X}[m] = \{0; 1; 0; 1\}$ .

Значения дискретного сигнала  $x[n]$  будем рассчитывать по формуле (4.8)

$$x[0] = 1/4 (X[0]e^{j0^\circ} + X[1]e^{j0^\circ} + X[2]e^{j0^\circ} + X[3]e^{j0^\circ}) = 0,5;$$

$$\begin{aligned} x[1] &= 1/4 \left( X[0]e^{j0^\circ} + X[1]e^{j\frac{\pi}{2}} + X[2]e^{j\pi} + X[3]e^{j\frac{6\pi}{4}} \right) = \\ &= 1/4 (0 + j1 + 0 - j1) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x[2] &= 1/4 (X[0]e^{j0^\circ} + X[1]e^{j\pi} + X[2]e^{j2\pi} + X[3]e^{j3\pi}) = \\ &= 1/4 (0 - 1 + 0 - 1) = -0,5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x[3] &= 1/4 \left( X[0]e^{j0^\circ} + X[1]e^{j\frac{3\pi}{2}} + X[2]e^{j3\pi} + X[3]e^{j\frac{9\pi}{2}} \right) = \\ &= 1/4 (0 - j + 0 + j) = 0. \end{aligned}$$

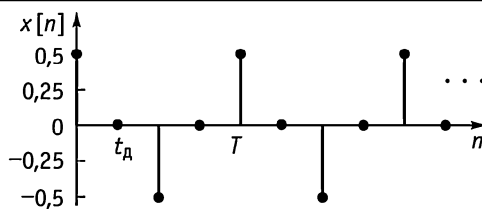


Рис. 4.14. Дискретный сигнал к примеру 4.6

График последовательности  $x[n] = \{0,5; 0; -0,5; 0\}$  приведен на рис. 4.14. Сигнал  $x[n]$  – дискретный и периодический.

### Вопросы и задания для самоконтроля

1. Как получить дискретный сигнал из непрерывного?
2. Как связаны интервал дискретизации и частота дискретизации?
3. Как рассчитывается спектр дискретного непериодического сигнала?
4. Рассчитать спектр дискретного сигнала, состоящего из двух отсчетов  $x[n] = \{a; b\}$ .

Ответ:  $X(jf) = a + be^{-j2\pi f \cdot t_d}$ .

5. Как выбирается интервал дискретизации?
6. Как рассчитывается спектр дискретного периодического сигнала?
7. Как изменится график спектра  $X[m]$  в примере 4.5, если изменить отсчет  $x[0]$  дискретного сигнала:  $x[0] = 1$ ?

## 5. Спектральный анализ модулированных сигналов

Если у высокочастотного колебания – переносчика, или несущего колебания – по закону передаваемого сигнала изменяется амплитуда, то такая модуляция несущего колебания называется амплитудной. Спектр амплитудно-модулированного сигнала состоит из несущего колебания и двух боковых полюс

Обычно в качестве переносчика сигнала используют гармоническое колебание высокой частоты – *несущее колебание*. Процесс преобразования первичного сигнала заключается в изменении одного или нескольких параметров несущего колебания по закону изменения первичного сигнала (т.е. в наделении несущего колебания признаками первичного сигнала) и называется *модуляцией*.

Запишем гармоническое колебание, выбранное в качестве несущего, в следующем виде:

$$v_0(t) = V \cos(\omega t + \varphi). \quad (5.1)$$

Это колебание полностью характеризуется тремя параметрами: амплитудой  $V$ , частотой  $\omega$  и начальной фазой  $\varphi$ . Модуляцию можно осуществить изменением любого из трех параметров по закону передаваемого сигнала.

Изменение во времени амплитуды несущего колебания пропорционально первичному сигналу  $s(t)$ , т.е.  $V(t) = V + k_{AM} s(t)$ , где  $k_{AM}$  – коэффициент пропорциональности, называется *амплитудной модуляцией* (АМ).

Несущее колебание (5.1) с модулированной по закону первичного сигнала амплитудой равно:  $v(t) = V(t) \cos(\omega t + \varphi)$ . Если в качестве первичного сигнала использовать то же гармоническое колебание (но с более низкой частотой  $\Omega$ )  $s(t) = S \cos \Omega t$ , то модулированное колебание запишется в виде (для упрощения взято  $\varphi = 0$ ):  $V(t) = (V + k_{AM} S \cos \Omega t) \cos \omega t$ .

Вынесем за скобки  $V$  и обозначим  $\Delta V = k_{AM} S$  и  $M_{AM} = \Delta V / V$ . Тогда

$$v(t) = V(1 + M_{AM} \cos \Omega t) \cos \omega t. \quad (5.2)$$

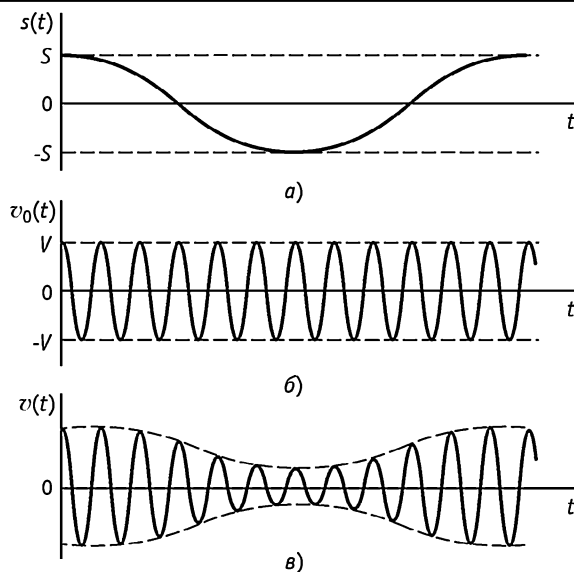


Рис. 5.1. Передаваемый сигнал (а), несущее колебание (б) и модулированный сигнал (в)

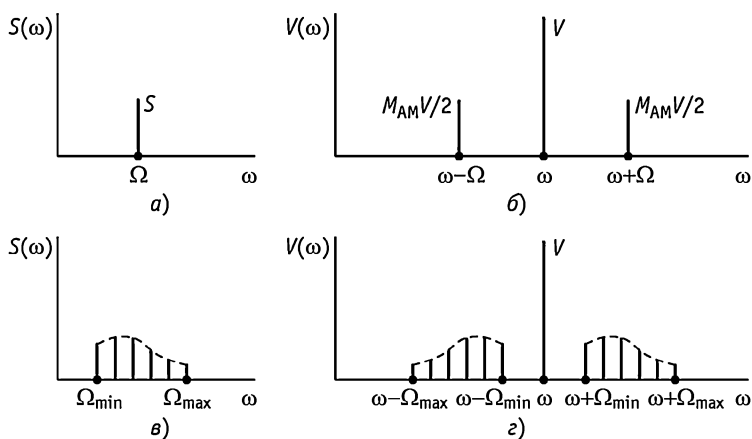


Рис. 5.2. Спектры синусоидального (а) и сложного (в) сигналов и модулированных ими по амплитуде несущих колебаний (б и д)

Параметр  $M_{AM} = \Delta V / V$  называется глубиной амплитудной модуляции. При  $M_{AM} = 0$  модуляции нет и  $v(t) = v_0(t)$ , т.е. получаем немодулированное несущее колебание (5.1). Обычно амплитуда несущего выбирается больше амплитуды первичного сигнала, так что  $M_{AM} \leq 1$ .

На рис. 5.1 показана форма передаваемого сигнала (а), несущего колебания до модуляции (б) и модулированного по амплитуде несущего колебания (в).

Произведя в (5.2) перемножение, получим, что амплитудно-модулированное колебание

$$v(t) = V \cos \omega t + (M_{AM} V / 2) \cos(\omega + \Omega)t + (M_{AM} V / 2) \cos(\omega - \Omega)t$$

состоит из суммы трех гармонических составляющих с частотами  $\omega$ ,  $\omega + \Omega$  и  $\omega - \Omega$  и амплитудами соответственно  $V$ ,  $M_{AM}V/2$  и  $M_{AM}V/2$ . Таким образом, спектр амплитудно-модулированного колебания (или АМ-колебания) состоит из частоты несущего колебания и двух боковых частот, симметричных относительно несущей, с одинаковыми амплитудами (рис. 5.2, б). Спектр первичного сигнала  $s(t)$  приведен на рис. 5.2, а.

**Пример 5.1.** Построим график спектра колебания

$$u(t) = 10(1 + 0,3 \cos 10^4 t) \cos 10^6 t, \text{ В.}$$

Сравнивая  $u(t)$  и (5.2), видим, что задано амплитудно-модулированное колебание с параметрами: амплитуда несущего колебания  $V = 10$  В, частота несущего колебания  $\omega = 10^6$  рад/с, частота первичного гармонического колебания  $\Omega = 10^4$  рад/с, глубина модуляции  $M_{AM} = 0,3$ .

Для расчета спектра колебания раскроем скобки в выражении для  $u(t)$  и воспользуемся тригонометрическим преобразованием  $\cos \alpha \cdot \cos \beta = 1/2 \cos(\alpha - \beta) - 1/2 \cos(\alpha + \beta)$ . Получаем

$$\begin{aligned} u(t) &= 10 \cos 10^6 t + 3 \cos 10^4 t \cdot \cos 10^6 t = \\ &= 10 \cos 10^6 t + 1,5 \cos 0,99 \cdot 10^6 t + 1,5 \cos 1,01 \cdot 10^6 t. \end{aligned}$$

Анализ полученного выражения показывает, что амплитудно-модулированное колебание  $u(t)$  есть сумма трех гармонических колебаний с частотами  $10^6$  рад/с,  $0,99 \cdot 10^6$  рад/с,  $1,01 \cdot 10^6$  рад/с и амплитудами  $V = 10$  В,  $1,5$  В и  $1,5$  В. Спектр амплитуд  $U(\omega)$  колебания  $u(t)$  изображен на рис. 5.3. Он содержит три спектральных составляющих: одну на частоте несущего колебания  $\omega = 10^6$  рад/с амплитудой  $V = 10$  В и две – на боковых частотах  $\omega - \Omega = 0,99 \cdot 10^6$  рад/с,  $\omega + \Omega = 1,01 \cdot 10^6$  рад/с с одинаковой амплитудой  $(M_{AM} \cdot V) / 2 = 1,5$  В.

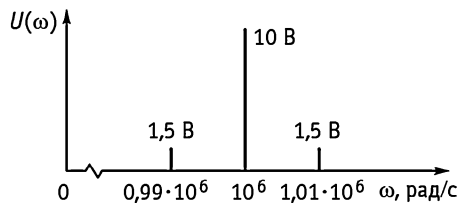


Рис. 5.3. Спектр колебания к примеру 5.1

**Пример 5.2.** Найдем аналитическое выражение амплитудно-модулированного колебания, спектры амплитуд и фаз которого, изображены на рис. 5.4, *а, б*.

Из анализа графиков (рис. 5.4, *а, б*) следует, что сигнал  $u(t)$  состоит из пяти гармонических колебаний:

$$\begin{aligned} u(t) = & 30 \cos\left(10^6 t + \frac{\pi}{2}\right) + 10 \cos\left[\left(10^6 + 10^3\right)t + \frac{5\pi}{4}\right] + \\ & + 5 \cos\left[\left(10^6 + 2 \cdot 10^3\right)t + \pi\right] + \\ & + 10 \cos\left[\left(10^6 - 10^3\right)t - \frac{\pi}{4}\right] + \\ & + 5 \cos\left[\left(10^6 - 2 \cdot 10^3\right)t + 0^\circ\right]. \end{aligned}$$

Преобразуем выражение для расчета  $u(t)$ , используя формулу

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Получаем

$$\begin{aligned} u(t) = & 30 \cos\left(10^6 t + \frac{\pi}{2}\right) + \\ & + 10 \cdot 2 \cos\left(10^6 t + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(10^3 t + \frac{3\pi}{4}\right) + \\ & + 5 \cdot 2 \cos\left(10^6 t + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(2 \cdot 10^3 t + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Приводим полученное выражение для амплитудно-модулированного колебания к виду, аналогичному (5.2):

$$\begin{aligned} u(t) = & 30 \left[ 1 + \frac{2}{3} \cos\left(10^3 t + \frac{3\pi}{4}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} \cos\left(2 \cdot 10^3 t + \frac{\pi}{2}\right) \right] \cos\left(10^6 t + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

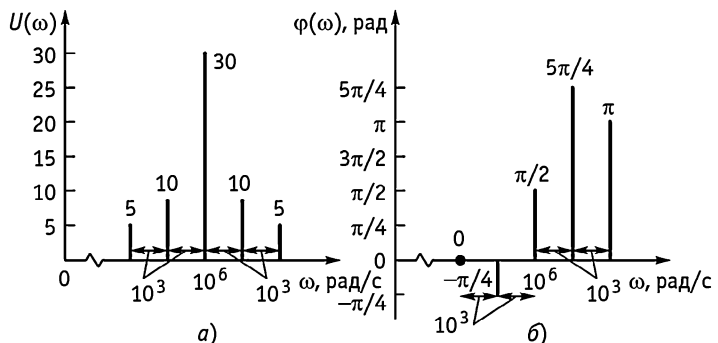


Рис. 5.4. Спектр амплитуд (*а*) и фаз (*б*) колебания к примеру 5.2

Если первичный сигнал сложный и его спектр ограничен частотами  $\Omega_{\min}$  и  $\Omega_{\max}$  (рис. 5.2, в), то спектр АМ-колебания будет состоять из несущего колебания и двух боковых полос, симметричных относительно несущей (рис. 5.2, з).

Анализ энергетических соотношений показывает, что основная мощность АМ колебания заключена в несущем колебании, которое не содержит полезной информации. Нижняя и верхняя боковые полосы несут одинаковую информацию и имеют более низкую мощность.

Если по закону передаваемого сигнала изменять частоту или фазу несущего колебания, то получим угловую – частотную и фазовую – модуляции. Спектр сигнала при угловой модуляции содержит много боковых полос

Можно изменять во времени пропорционально первичному сигналу  $s(t)$  не амплитуду, а частоту несущего колебания:

$$\omega(t) = \omega + k_{\text{ЧМ}}s(t) = \omega + \Delta\omega \cos \Omega t, \quad (5.3)$$

где  $k_{\text{ЧМ}}$  – коэффициент пропорциональности; величина  $\Delta\omega = k_{\text{ЧМ}}S$  – называется девиацией частоты (фактически это максимальное отклонение частоты модулированного сигнала от частоты несущего колебания).

Такой вид модуляции называется *частотной модуляцией*. На рис. 5.5 показано изменение частоты несущего колебания при частотной модуляции.

При изменении фазы несущего колебания получим фазовую модуляцию

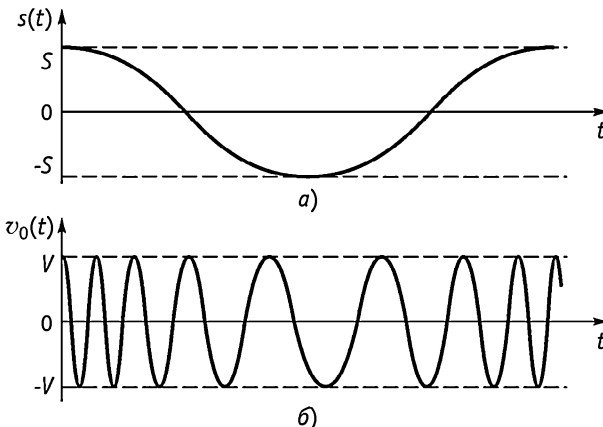


Рис. 5.5. Исходный (а) и частотно-модулированный (б) сигналы

$$\varphi(t) = \varphi + k_{\text{ФМ}} s(t) = \varphi + \Delta\varphi \cos \Omega t, \quad (5.4)$$

где  $k_{\text{ФМ}}$  – коэффициент пропорциональности;  $\Delta\varphi = k_{\text{ФМ}} S = M_{\text{ФМ}}$  – индекс фазовой модуляции.

Между частотной и фазовой модуляцией существует тесная связь. Представим несущее колебание в виде

$$v_0(t) = V \cos(\omega t + \varphi) = V \cos \Psi(t), \quad (5.5)$$

где  $\varphi$  – начальная фаза колебания, а  $\Psi(t)$  – его полная фаза. Между фазой  $\Psi(t)$  и частотой  $\omega$  существует связь:

$$\Psi(t) = \int_0^t \omega(t) dt + \varphi. \quad (5.6)$$

Подставим в (5.6) выражение (5.3) для  $\omega(t)$  при частотной модуляции:

$$\Psi(t) = \omega(t) + (\Delta\omega/\Omega) \sin \Omega t + \varphi.$$

Величина  $M_{\text{ЧМ}} = \Delta\omega/\Omega$  называется индексом частотной модуляции.

Частотно-модулированное колебание запишется в виде:

$$v(t) = V \cos(\omega t + M_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t + \varphi). \quad (5.7)$$

Фазово-модулированное колебание с учетом (5.4) для  $\varphi(t)$  следующее:

$$v(t) = V \cos(\omega t + M_{\text{ФМ}} \cos \Omega t + \varphi). \quad (5.8)$$

Из сравнения (5.7) и (5.8) следует, что по внешнему виду сигнала  $v(t)$  трудно различить, какая модуляция применена – частотная или фазовая. Часто оба эти вида модуляции называют *угловой модуляцией*, а  $M_{\text{ЧМ}}$  и  $M_{\text{ФМ}}$  – индексами угловой модуляции.

Несущее колебание, подвергнутое угловой модуляции (5.7) или (5.8), можно представить в виде суммы гармонических колебаний:

$$v(t) = V \{ I_0(M) \cos \omega t + I_1(M) \cos(\omega + \Omega)t + \\ + I_1(M) \cos(\omega - \Omega)t + I_2(M) \cos(\omega + 2\Omega)t + \\ + I_2(M) \cos(\omega - 2\Omega)t + I_3(M) \cos(\omega + 3\Omega)t + \\ + I_3(M) \cos(\omega - 3\Omega)t + \dots \}.$$

Здесь  $M$  – индекс угловой модуляции, принимающий значение  $M_{\text{ЧМ}}$  при ЧМ и  $M_{\text{ФМ}}$  при ФМ. Амплитуды гармоник в этом выражении определяются некоторыми коэффициентами  $I_k(M)$ , значения которых при различных аргументах приводятся в специальных справочных таблицах. Чем больше  $M$ , тем шире спектр модулированного колебания.

**Пример 5.3.** Получим спектр колебания с угловой модуляцией

$$u(t) = 8 \cos(10^6 t + 0,06 \sin 10^4 t).$$

Заданный сигнал имеет параметры: амплитуда несущего колебания  $V = 8$  В, частота несущего колебания  $\omega = 10^6$



рад/с, частота первичного сигнала  $\Omega = 10^4$  рад/с, индекс угловой модуляции  $M = 0,06$ .

Используя тригонометрическое преобразование

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta,$$

представим выражение для расчета  $u(t)$  в виде

$$u(t) = 8 \left[ \cos 10^6 t \cdot \cos(0,06 \sin 10^4 t) - \sin 10^6 t \cdot \sin(0,06 \sin 10^4 t) \right].$$

Разложим в ряд Тейлора функции  $\cos(0,06 \sin 10^4 t)$  и  $\sin(0,06 \sin 10^4 t)$ :

$$\begin{aligned} \cos(0,06 \sin 10^4 t) &= 1 - \frac{0,06^2}{2!} \cdot \sin^2 10^4 t + \\ &\quad + \frac{0,06^4}{4!} \cdot \sin^4 10^4 t - \dots \\ \sin(0,06 \sin 10^4 t) &= 0,06 \sin 10^4 t - \frac{0,06^3}{3!} \sin^3 10^4 t + \\ &\quad + \frac{0,06^5}{5!} \sin^5 10^4 t - \dots \end{aligned}$$

Поскольку индекс угловой модуляции  $M = 0,06$  намного меньше единицы, то в каждом из двух записанных выше рядов оставим только первый член, а остальными пренебрегаем ввиду их малости. В результате получаем

$$u(t) = 8 \left[ (\cos 10^6 t) \cdot 1 - (\sin 10^6 t) \cdot 0,06 \sin 10^4 t \right].$$

Используя еще одно тригонометрическое преобразование

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

находим, что

$$u(t) = 8 \cos 10^6 t + 0,24 \cos 1,01 \cdot 10^6 t - 0,24 \cos 0,99 \cdot 10^6 t$$

представляет собой сумму только трех гармонических колебаний. Сигнал узкополосный, поскольку индекс модуляции  $M = 0,06 \ll 1$ .

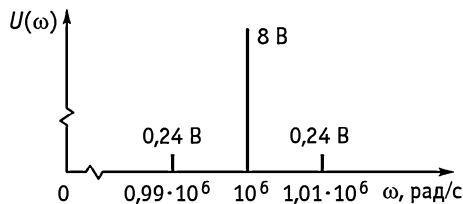


Рис. 5.6. Спектр сигнала к примеру 5.3

Спектр заданного модулированного сигнала  $u(t)$  содержит спектральную составляющую на частоте  $\omega = 10^6$  рад/с несущего колебания с амплитудой, равной 8 В, а также две спектральные составляющие на боковых частотах  $(\omega + \Omega) = 1,01 \cdot 10^6$  рад/с и  $(\omega - \Omega) = 0,99 \cdot 10^6$  рад/с одинаковой амплитуды 0,24 В. Спектр сигнала изображен на рис. 5.6.

Таким образом, спектр модулированной несущей при угловой модуляции даже при гармоническом первичном сигнале  $s(t)$  состоит из бесконечного числа дискретных составляющих, образующих нижнюю и верхнюю боковые полосы спектра, симметричные относительно несущей частоты и имеющие одинаковые амплитуды (рис. 5.7).

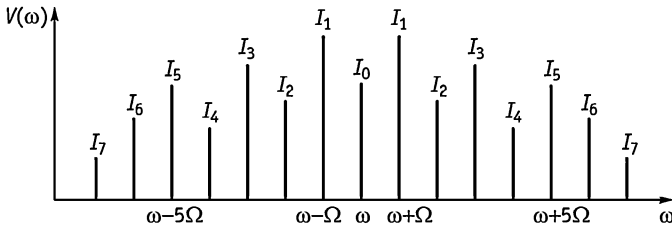


Рис. 5.7. Спектр частотно-модулированного сигнала

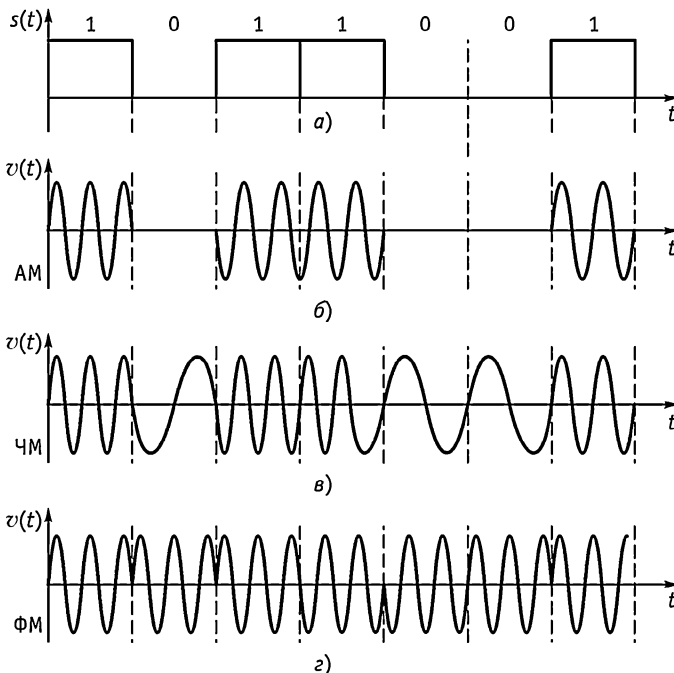


Рис. 5.8. Дискретный сигнал (а) и несущее колебание, модулированное этим сигналом по амплитуде (б), частоте (в) и фазе (г)

В случае, если первичный сигнал  $s(t)$  имеет форму, отличную от синусоидальной, и занимает полосу частот от  $\Omega_{\min}$  до  $\Omega_{\max}$ , то спектр модулированного колебания при угловой модуляции будет иметь еще более сложный вид.

Иногда отдельно рассматривают модуляцию гармонического несущего колебания по амплитуде, частоте или фазе дискретными первичными сигналами  $s(t)$ , например телеграфными или передачи данных. На рис. 5.8 показан дискретный первичный сигнал (*a*), несущее колебание, модулированное по амплитуде (*b*), частоте (*в*) и фазе (*г*).

Модуляцию гармонического несущего колебания первичным сигналом  $s(t)$  называют непрерывной, так как в качестве переносчика выбран непрерывный периодический сигнал  $v_0(t)$ .

Сравнение различных видов непрерывной модуляции позволяет выявить их особенности. При амплитудной модуляции ширина спектра модулированного сигнала, как правило, значительно меньше, чем при угловой модуляции (частотной и фазовой). Таким образом, налицо экономия частотного спектра: для амплитудно-модулированных сигналов можно отводить при передаче более узкую полосу частот. Как будет показано дальше, это особенно важно при построении многоканальных систем передачи.

Если в качестве переносчика использовать периодическую последовательность очень узких прямоугольных импульсов, то получают различные виды импульсной модуляции – амплитудно-импульсную, частотно-импульсную и фазоимпульсную

Часто в качестве переносчика используют периодическую последовательность сравнительно узких импульсов. Последовательность прямоугольных импульсов одного знака  $v_0(t)$  характеризуется параметрами (рис. 5.9): амплитудой импульсов  $V$ ; длительностью (шириной) импульсов  $t_n$ ; частотой следования (или тактовой частотой)  $f_T = 1/T$ , где  $T$  – период следования импульсов ( $\omega_T = 2\pi f_T$ ); положением (фазой) импульсов относительно тактовых (отсчетных) точек. Отношение  $T/t_n$  называется *скважностью* импульсов.

По закону передаваемого первичного сигнала можно изменять (модулировать) любой из перечисленных параметров импульсной последовательности. При этом *модуляция* называется *импульсной*.

В зависимости от того, какой параметр модулируется первичным сигналом  $s(t)$ , различают: *амплитудно-импульсную* модуляцию (АИМ), когда по закону передаваемого сигнала (рис. 5.10, *a*) изменяется амплитуда

импульсов (см. рис. 5.10, б); *широтно-импульсную* модуляцию (ШИМ), когда изменяется ширина импульсов (рис. 5.10, в); *частотно-импульсную* модуляцию (ЧИМ) – изменяется частота следования импульсов (см. рис. 5.10, г); *фазо-импульсную* модуляцию (ФИМ) – изменяется фаза импульсов, т.е. временное положение относительно тактовых точек (см. рис. 5.10, д).

Модуляцию ФИМ и ЧИМ объединяют во *временно-импульсную* (ВИМ). Между ними существует связь, аналогичная связи между фазовой и частотной модуляцией синусоидального колебания.

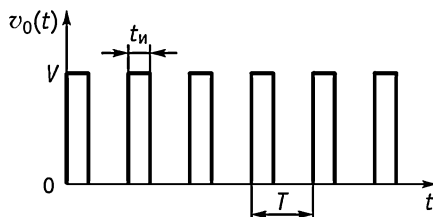


Рис. 5.9. Периодическая последовательность узких импульсов

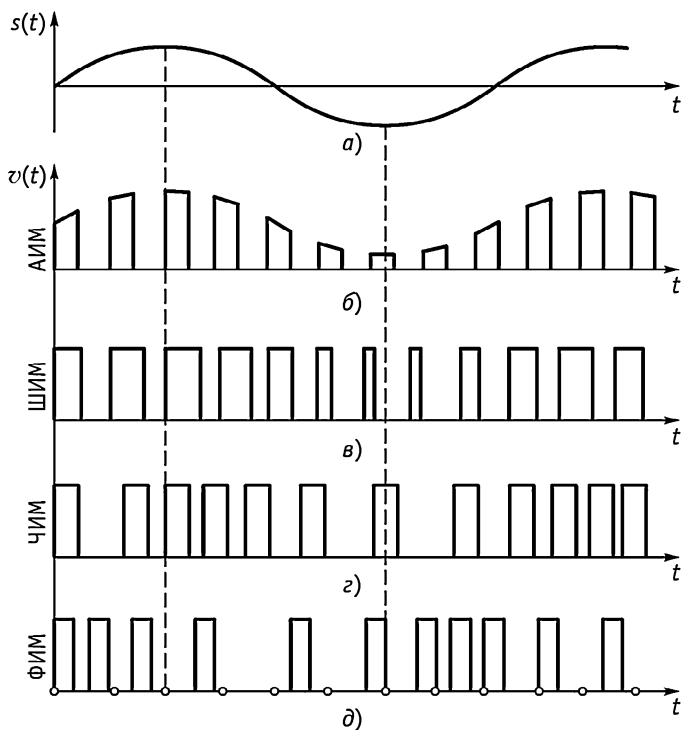


Рис. 5.10. Виды импульсной модуляции

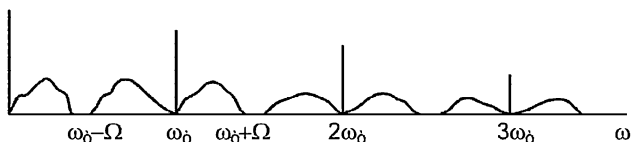


Рис. 5.11. Спектр АИМ-сигнала

В качестве примера на рис. 5.11 показан спектр АИМ сигнала при модуляции импульсной последовательности сложным первичным сигналом  $s(t)$  с полосой частот от 0 до  $\Omega$ . Он содержит спектр исходного сигнала  $s(t)$ , все гармоники тактовой частоты  $\omega_T$  (т.е. частоты  $2\omega_T, 3\omega_T, 4\omega_T$  и т.д.) и боковые полосы частот около гармоник тактовой частоты.

Спектры сигналов ШИМ, ЧИМ и ФИМ имеют еще более сложный вид.

Импульсные последовательности, изображенные на рис. 5.10, называются последовательностями *видеоимпульсов*. Если позволяет среда распространения, то видеоимпульсы передаются без дополнительных преобразований (например, по кабелю). Однако по радиолиниям передать видеоимпульсы невозможно. Тогда сигнал подвергают второй ступени преобразования (модуляции).

Модулируя с помощью видеоимпульсов гармоничное несущее колебание достаточно высокой частоты, получают *радиоимпульсы*, которые способны распространяться в эфире. Полученные в результате сочетания первой и второй ступеней модуляции сигналы могут иметь названия АИМ–АМ, ФИМ–АМ, ФИМ–ЧМ и др.

Сравнение импульсных видов модуляции показывает, что АИМ имеет меньшую ширину спектра по сравнению с ШИМ и ФИМ. Однако последние более устойчивы к воздействию помех. Для обоснования выбора метода модуляции в системе передачи необходимо сравнить эти методы по различным критериям: энергетическим затратам на передачу сигнала, помехоустойчивости (способности модулированных сигналов противостоять вредному воздействию помех), сложности оборудования и др.

### Вопросы и задания для самоконтроля

1. Какой сигнал называется амплитудно-модулированным?
2. Что такое глубина амплитудной модуляции?
3. Какой спектр имеет амплитудно-модулированный сигнал?
4. Как повлияет на спектр сигнала, рассмотренного в примере 5.1, увеличение глубины модуляции в 2 раза?
5. Какой вид модуляции называется частотой?
6. Какой вид модуляции называется фазовой?
7. Почему частотную и фазовую модуляции называют угловой?

- 
8. Как определяется спектр колебания, подвергнутого угловой модуляции?
9. В спектре сигнала, рассмотренного в примере 5.3, определить амплитуды спектральных составляющих с частотами  $(\omega \pm 2\Omega)$ .  
Указание: при разложении функций  $\cos(M \sin \Omega t)$  и  $\sin(M \sin \Omega t)$  в ряд Тейлора ограничьтесь двумя членами каждого ряда.  
Ответ:  $U(\omega \pm 2\Omega) = 3,6 \cdot 10^{-3}$  В.
10. Какие виды импульсной модуляции существуют? Пояснить по рисунку 5.10.
11. Каковы особенности спектров сигналов при импульсной модуляции?

## Приложение 1

### Задачи на тему «Основы спектрального анализа» с решениями

#### Задача № 1.

Найти и построить спектры амплитуд и фаз периодической последовательности прямоугольных импульсов (рис. П1.1) для двух случаев:  $t_n = 10$  мкс;  $t_n = 5$  мкс; если  $E = 10$  В;  $T = 20$  мкс.

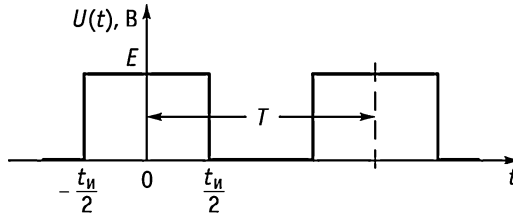


Рис. П1.1

#### Решение:

Периодическую последовательность импульсов можно представить в виде ряда Фурье:

$$f(t) = \frac{U_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos(n\omega_1 t - \varphi_n),$$

$U_{mn} = U_{mn} e^{-j\varphi_n}$  – комплексная амплитуда  $n$ -й гармоники.

Для определения комплексных амплитуд воспользуемся комплексной формой ряда Фурье:

$$u(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{mn} e^{jn\omega_1 t},$$

где 
$$U_{mn} = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{2}{T} \int_{-t_n/2}^{t_n/2} E e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{2E e^{-jn\omega_1 t}}{T(-jn\omega_1)} \Big|_{-t_n/2}^{t_n/2}.$$

Учтем, что

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T},$$

тогда

$$\underline{U}_{mn} = \frac{2E}{n\pi} \frac{e^{jn\omega_1 t_n/2} - e^{-jn\omega_1 t_n/2}}{2j},$$

$$\underline{U}_{mn} = \frac{2E}{n\pi} \sin\left(\frac{n\omega_1 t_n}{2}\right) = \frac{2E}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi t_n}{T}\right).$$

Спектр амплитуд:

$$|U_{mn}| = \frac{2E}{n\pi} \left| \sin\left(\frac{n\omega_1 t_n}{2}\right) \right|.$$

Спектр фаз:

$$\varphi_n = \pm\pi \text{ при } \sin\left(\frac{n\omega_1 t_n}{2}\right) < 0;$$

$$\varphi_n = 0 \text{ при } \sin\left(\frac{n\omega_1 t_n}{2}\right) > 0.$$

Полагая  $n = 0, 1, 2, \dots$ , найдем комплексные амплитуды. При  $n = 0$

$$U_0 = \frac{0}{0} \text{ (неопределенность).}$$

Раскроем неопределенность, учитывая, что при  $x = 0$ ,  $\sin x = x$

$$U_0 = \frac{2E}{n\pi} \cdot \frac{n\pi t_n}{T} = 2E \frac{t_n}{T}.$$

При  $n = 1$

$$U_{m1} = \frac{2E}{\pi} \left( \sin \frac{\pi t_n}{T} \right) \text{ и т.д.}$$

Данные расчета сведем в таблицу П1.1

Таблица П1.1

$n$ – номер гармоники	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
$f$ , кГц	0	50	100	150	200	250	300	350	400	
$U_{mn}$ , В	$t_n = 10$ , мкс	10	6,37	0	-2,12	0	1,27	0	-0,91	0
	$t_n = 5$ , мкс	5	4,5	3,18	1,5	0	-0,9	-1,06	-0,664	0

Построим спектры амплитуд для  $t_n = 10$  мкс и  $t_n = 5$  мкс (рис. П1.2).

Приведем спектр фаз для  $t_n = 10$  мкс (рис. П1.3).

**Выводы:**

1) Периодическая последовательность прямоугольных импульсов имеет дискретные спектры амплитуд и фаз. Составляющие спектров отстоят друг от друга на расстоянии:

$$f_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{20 \cdot 10^{-6}} = 50 \text{ кГц.}$$

2) Спектр амплитуд содержит составляющие, равные нулю. Номера нулевых гармоник можно найти из уравнения:



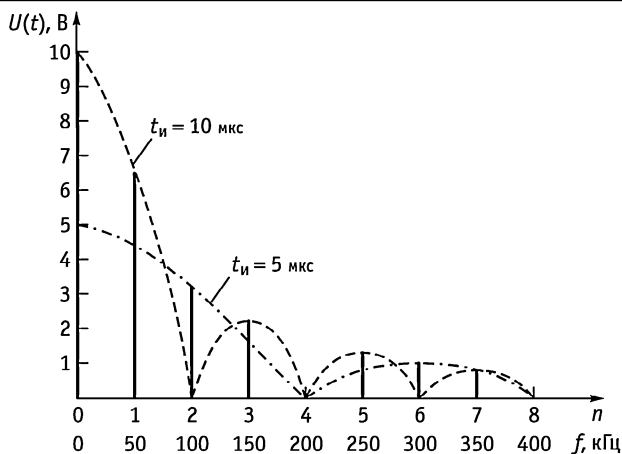


Рис. П1.2

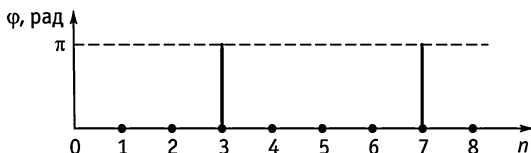


Рис. П1.3

$$\sin(n\pi t_n/T) = 0; \quad n\pi t_n/T = k\pi$$

или

$$n = kT/t_n,$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots$

В нашем примере нулевые гармоники при  $T = 20$  мкс;  $t_n = 10$  мкс – 2, 4, 6, 8, и т.д.; при  $t_n = 5$  мкс – 4, 8, 12, ... и т.д.

3) Из рисунка спектров амплитуд видно, что чем уже импульсы (меньше длительность  $t_n$ ), тем амплитуды гармонических составляющих меньше и убывают они медленнее с ростом частоты.

### Задача № 2.

Найти спектры амплитуд и фаз периодической последовательности прямоугольных импульсов (рис. П1.4), если уже найдены спектры для последовательности, приведенной в задаче 1. Решить задачу в общем виде.

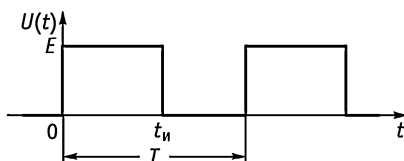


Рис. П1.4

Решение:

Данная последовательность отличается от приведенной в задаче 1 тем, что импульсы запаздывают на время  $t_u/2$ . Используя теорему запаздывания, найдем спектр комплексных амплитуд по формуле:

$$u\left(t - \frac{t_u}{2}\right) \div e^{-jn\omega_1 t_u/2} U_{mn} = \frac{2E}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi t_u}{T}\right) e^{-jn\omega_1 t_u/2}.$$

Спектр амплитуд останется прежним

$$U_{mn} = \frac{2E}{n\pi} \left| \sin\left(\frac{n\pi t_u}{T}\right) \right|.$$

Спектр фаз будет равен:

$$\varphi(\omega) = -n\omega_1 \frac{t_u}{2} = -\frac{2\pi n t_u}{2T} \quad \text{при } \sin\left(\frac{n\pi t_u}{T}\right) > 0;$$

$$\varphi(\omega) = \pi - \frac{\pi n t_u}{2T} \quad \text{при } \sin\left(\frac{n\pi t_u}{T}\right) < 0.$$

Приведем спектр фаз для  $T = 20$  мкс,  $t_u = 10$  мкс (рис. П1.5):

$$\varphi(\omega) = -\frac{n\pi}{2} \quad \text{или} \quad \varphi(\omega) = \pi - \frac{n\pi}{2}.$$

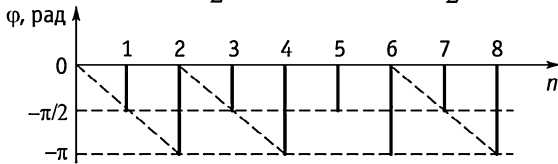


Рис. П1.5

Задача № 3.

Построить качественно спектр амплитуд последовательности прямоугольных импульсов с периодом повторения  $T = 10$  мс и длительностью импульсов  $t_u = 2$  мс.

Решение:

Определим гармоники, амплитуды которых равны 0:

$$n = k \frac{T}{t_u} = k \frac{10}{2} = 5k, \quad \text{где } k = 1, 2, 3, \dots$$

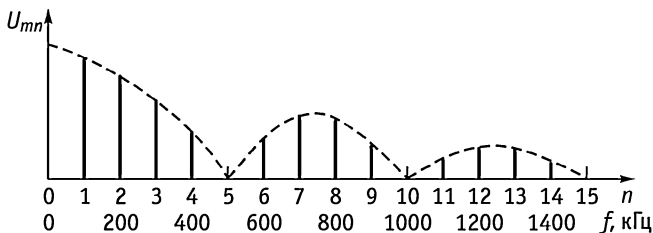


Рис. П1.6

Таковыми будут гармоники 5, 10, 15, .... Частота 1-й гармоники  $f_1 = 1/T = 100$  Гц.

Построим качественно график спектра амплитуд (рис. П1.6).

#### **Задача № 4.**

Найти спектральную плотность одиночного прямоугольного импульса (рис. П1.7), пользуясь спектром периодической последовательности прямоугольных импульсов, полученных в задаче 1. Привести качественно график модуля спектральной плотности  $U(\omega)$ .

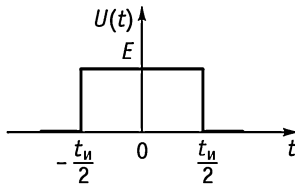


Рис. П1.7

#### **Решение:**

Используем связь между спектральной плотностью непериодического (одиночного) импульса и спектром комплексных амплитуд периодического сигнала:

$$U(j\omega) = \frac{T}{2} U_{mn} \Big|_{n\omega_1 = \omega}; \quad U_{mn} = \frac{2E}{n\pi} \sin\left(\frac{n\omega_1 t_n}{2}\right); \quad T = \frac{2\pi}{\omega_1};$$

$$U(j\omega) = \frac{2\pi}{2\omega_1} \frac{2E}{n\pi} \sin\left(\frac{n\omega_1 t_n}{2}\right) \Big|_{n\omega_1 = \omega}; \quad U(j\omega) = \frac{2E}{\omega} \sin \frac{\omega t_n}{2}.$$

Данную задачу можно решить другим способом, используя непосредственно прямое преобразование Фурье:

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-t_n/2}^{t_n/2} E e^{-j\omega t} dt = \frac{E e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{-t_n/2}^{t_n/2} = \frac{2E}{\omega} \frac{e^{j\omega t_n/2} - e^{-j\omega t_n/2}}{2j};$$

$$U(j\omega) = \frac{2E}{\omega} \sin \frac{\omega t_n}{2};$$

$$|U(j\omega)| = U(\omega) = \frac{2E}{\omega} \left| \sin \frac{\omega t_n}{2} \right|.$$

Прежде чем строить график  $U(\omega)$ , определим значение  $U(\omega)$  при  $\omega = 0$ :

$$U(0) = \frac{2E \sin 0}{0} = \frac{0}{0}; \quad (\text{неопределенность}).$$

Чтобы раскрыть неопределенность, воспользуемся соотношением:

$$\sin \frac{\omega t_n}{2} \Big|_{\omega=0} \approx \frac{\omega t_n}{2};$$

$$U(0) = \frac{2E}{\omega} \frac{\omega t_n}{2} = Et_n.$$

Определим частоты, при которых  $U(\omega) = 0$ :

$$\frac{\omega_{\min} t_n}{2} = k\pi,$$

$$\omega_{\min} = \frac{2k\pi}{t_n}, \text{ где } k=1, 2, 3, \dots$$

Построим график  $U(\omega)$  (рис. П1.8).

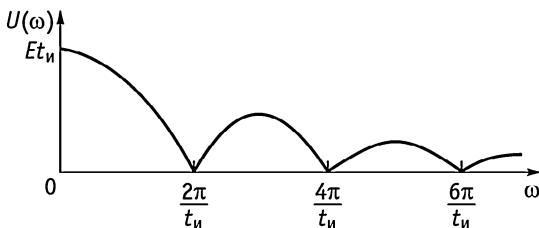


Рис. П1.8

**Выводы:**

- 1) Спектр одиночного прямоугольного импульса является сплошным.
- 2) Форма огибающей спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов повторяет форму спектра одиночного импульса.

**Задача № 5.**

Определить спектральную плотность экспоненциального импульса включения (рис. П1.9), если

$$\begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ u(t) = U_m e^{-\alpha t} & \text{при } t \geq 0, \end{cases}$$

где  $U_m = 10 \text{ В}$ ;  $\alpha = 50 \text{ с}^{-1}$ . Построить графики  $U(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ .

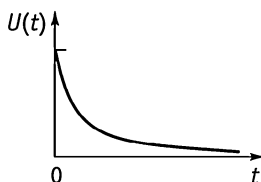


Рис. П1.9

**Решение:**

Определяем спектральную плотность импульса, используя прямое преобразование Фурье:

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt;$$

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_m e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = U_m \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t} dt = \frac{U_m e^{-(\alpha+j\omega)t}}{-(\alpha+j\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{U_m}{\alpha+j\omega};$$

$$U(j\omega) = U(\omega) e^{-j\varphi(\omega)}.$$

$$U(\omega) = \frac{U_m}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} - \text{«спектр амплитуд»};$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha} - \text{«спектр фаз»}.$$

Произведем расчет «спектров» амплитуд и фаз в диапазоне частот 0...400 рад/с. Результаты расчетов сведем в табл. 3.2.

Таблица 3.2.

$\omega$ , рад/с	0	50	100	200	300	400
$U(\omega)$ , В·с	0,2	0,142	0,09	0,048	0,033	0,025
$\varphi(\omega)$ , град	0	45	63	76	81	83

По этим данным построим графики (рис. П1.10).

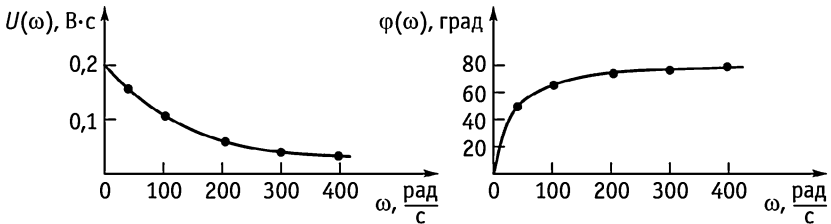


Рис. П1.10

**Задача № 6.**

На вход цепи воздействует прямоугольный импульс  $U_1(t)$  (рис. П1.11).  $R = 200 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,1 \text{ Гн}$ ;  $U_m = 318 \text{ В}$ ;  $t_{и} = 3,14 \text{ мс}$ . Найти спектральную плотность напряжения на выходе цепи  $V_2(j\omega)$ .

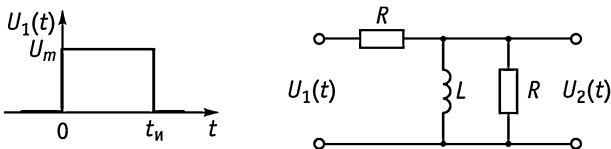


Рис. П1.11

Решение:

1) Определяем спектральную плотность входного сигнала  $U_1(j\omega)$  (см. решение задачи 4):

$$U_1(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin\left(\frac{\omega t_n}{2}\right) e^{-j\omega t_n/2}.$$

2) Определяем комплексную передаточную функцию цепи:

$$H(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{\frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L}}{R + \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L}} = \frac{jLR\omega}{R^2 + j2LR\omega} = \frac{j\frac{\omega}{2}}{\frac{R}{2L} + j\omega} = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)}.$$

АЧХ цепи:

$$H(\omega) = \frac{\omega}{2\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega^2}}.$$

ФЧХ цепи:

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{2L\omega}{R}\right).$$

Подставим численные значения:

$$H(\omega) = \frac{\omega}{2\sqrt{10^6 + \omega^2}}; \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg(10^{-3}\omega).$$

3) Определяем спектральную плотность выходного сигнала:

$$U_2(j\omega) = U_1(j\omega) \cdot H(j\omega).$$

Определим модуль

$$\begin{aligned} |U_2(j\omega)| &= |U_1(j\omega)| \cdot |H(j\omega)| = \\ &= \frac{2U_m}{\omega} \left| \sin \frac{\omega t_n}{2} \right| \frac{\omega}{2\sqrt{10^6 + \omega^2}} = \frac{318}{\sqrt{10^6 + \omega^2}} \sin \frac{\omega t_n}{2}. \end{aligned}$$

Сведем результаты расчетов в табл. 3.3.

Таблица 3.3.

$\omega$	$\omega$ , рад/с	$ U_1(j\omega) $ , В·с	$ H(j\omega) $	$ U_2(j\omega) $ , В·с
0	0	1	0	0
$\pi/t_n$	1000	0,63	0,335	0,227
$2\pi/t_n$	2000	0	0,450	0
$3\pi/t_n$	3000	0,21	0,475	0,1
$4\pi/t_n$	4000	0	0,485	0
$5\pi/t_n$	5000	0,13	0,490	0,063
$6\pi/t_n$	6000	0	0,492	0

4) Построим графики:  $|U_1(j\omega)|$ ,  $|H(j\omega)|$ ,  $|U_2(j\omega)|$  (рис. П1.12).

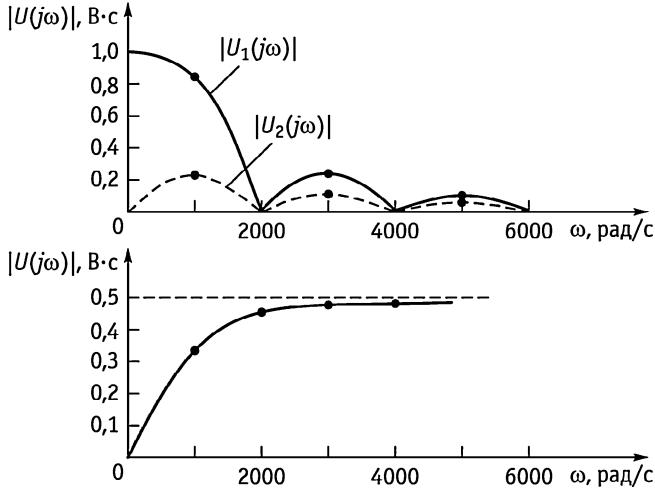


Рис. П1.12

**Задача № 7.**

Найти входное сопротивление и схему цепи, способной формировать импульсы вида:  $i(t) = I_0(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$  из импульса включения постоянного напряжения  $E$ .

Решение:

1) Найдем спектральную плотность входного напряжения:

$$u(t) = E \Rightarrow U(j\omega) = \frac{E}{j\omega}.$$

2) Найдем спектральную плотность тока  $i(t)$ . Используем теорему линейности:

$$I(j\omega) = I_0 \left( \frac{1}{\alpha + j\omega} - \frac{1}{\beta + j\omega} \right) = I_0 \frac{\beta - \alpha}{(\alpha + j\omega)(\beta + j\omega)};$$

$$\left( e^{-\alpha t} \div \frac{1}{p + \alpha}; e^{-\beta t} \div \frac{1}{p + \beta} \right).$$

3) Найдем комплексное входное сопротивление цепи:

$$Z(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{I(j\omega)} = \frac{E}{I_0(\beta - \alpha)} \frac{(\alpha + j\omega)(\beta + j\omega)}{j\omega} = \frac{E[\alpha\beta - \omega^2 + j\omega(\alpha + \beta)]}{I_0(\beta - \alpha)j\omega}.$$

Введем обозначение:  $R_0 = E/I_0$ .

$$Z(j\omega) = \frac{R_0\alpha\beta}{j\omega(\beta - \alpha)} + j\omega \frac{R_0}{(\beta - \alpha)} + R_0 \frac{\alpha + \beta}{\beta - \alpha}.$$

$Z(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} + j\omega L + R$  – последовательное соединение  $C$ ,  $L$  и  $R$  (рис. П1.13);

$$C = \frac{\beta - \alpha}{R_0 \alpha \beta}; \quad L = \frac{R_0}{\beta - \alpha}; \quad R = R_0 \frac{\alpha + \beta}{\beta - \alpha}.$$

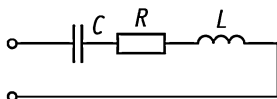


Рис. П1.13



**Приложение 2**  
**Задачи на тему «Основы спектрального анализа»**  
**для самостоятельного решения**

**Задача № 1.**

Представить последовательность пилообразных импульсов (рис. П.2.1) в виде ряда Фурье. Построить спектры амплитуд и фаз, если  $E = 10$  В;  $t_n = 10$  мс.

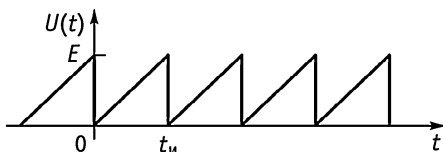


Рис. П.2.1

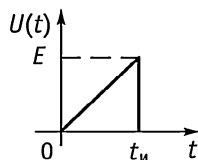


Рис. П.2.2

Ответ:  $u(t) = 5 + \frac{10}{\pi} \sin(628t - 180^\circ) + \frac{10}{2\pi} \sin(1256t - 180^\circ) + \dots$

**Задача № 2.**

Определить спектральную плотность одиночного пилообразного импульса (рис. П. 2.2) при  $E = 10$  В;  $t_n = 10$  мс.

Ответ:  $U(j\omega) = \frac{1000}{\omega^2} \left[ (e^{-j10^{-2}\omega} - 1) + j10^{-2}\omega e^{-j\omega^{-2}\omega} \right]$ .

**Задача № 3.**

Найти спектральную плотность функции включения на постоянное напряжение:

$$\begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ u(t) = U_m & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Примечание: следует воспользоваться таблицей соответствия оригиналов и изображений.

Ответ:  $U(j\omega) = \frac{U_m}{j\omega}$ .

**Задача № 4.**

Найти спектральную плотность функции включения на синусоидальное напряжение:

$$\begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ u(t) = U_m \sin \omega_0 t & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Примечание: то же, что в задаче 3.

Ответ:  $U(j\omega) = \frac{U_m \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$ .

**Задача № 5.**

Найти спектральную плотность сигнала, представляющего собой отрезок синусоиды:

$$\begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0; \\ u(t) = U_m \sin \omega_0 t & \text{при } 0 \leq t \leq t_n; \\ 0 & \text{при } t \geq t_n. \end{cases}$$

Ответ:  $U(j\omega) = \frac{2U_m \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{t_n \omega}{2}\right) e^{j(t_n \omega/2 - \pi/2)}$ .

**Задача № 6.**

На вход цепи (рис. П1.3) подается напряжение  $U_{\text{вх}}(t) = 40e^{-10t}$  В.  
Дано:  $R_1 = 20$  кОм;  $R_2 = 5$  кОм;  $C = 5$  мкФ. Найти:  $i_C(t)$ .

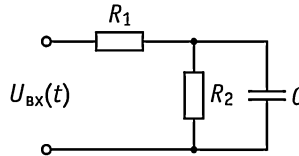


Рис. П1.3

Ответ:  $i_C(t) = (2,5e^{-50t} - 0,5e^{-10t}) \cdot 10^{-3}$  А.

**Задача № 7.**

Условие задачи № 6. Найти  $U_C(t)$ .

Ответ:  $U_C(t) = 10(e^{-10t} - e^{-50t})$  В.

**Задача № 8.**

На вход цепи рис. (П1.3) подается напряжение:

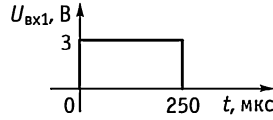
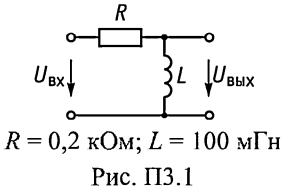
$$\begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ U_{\text{вх}}(t) = U_m & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Найти  $u_2(t)$ .

Ответ:  $u_2(t) = U_m \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ , где  $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ .

ТЕСТ № 1

1.



$$U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_n}{2} e^{-j\omega t_n/2}$$

Рис. ПЗ.2

Найти:  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ ,  $|H(j\omega)|$ ,  $|U_{\text{вых}}(j\omega)|$ . Построить графики найденных функций в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

2.

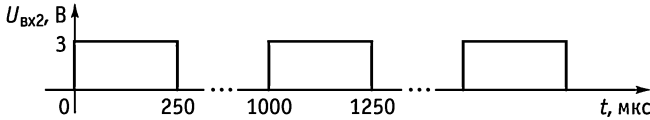


Рис. ПЗ.3

- Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.3).
- Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.
- Найти постоянную составляющую и амплитуду 2-й гармоники выходного напряжения.

3.

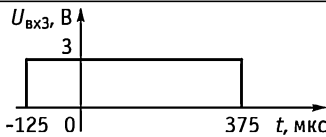


Рис. ПЗ.4

Используя заданное  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.2), найти  $U_{\text{вх3}}(j\omega)$  (Рис. ПЗ.4). Построить график  $|U_{\text{вх3}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Сравнить с  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ .

4.

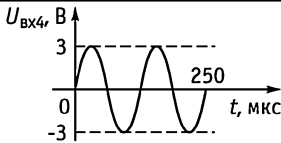


Рис. ПЗ.5

Используя  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$ , найти  $U_{\text{вх4}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.5). Качественно построить график  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Указать величину  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|_{\text{max}}$ .

5.

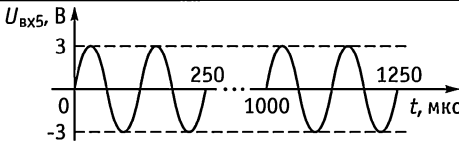


Рис. ПЗ.6

Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.6) в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

## ТЕСТ № 2

1.

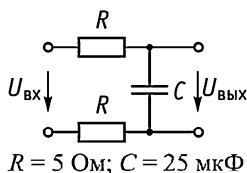
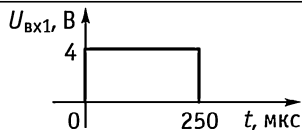


Рис. ПЗ.7



$$U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_H}{2} e^{-j\omega t_H/2}$$

Рис. ПЗ.8

Найти:  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ ,  $|H(j\omega)|$ ,  $|U_{\text{вых}}(j\omega)|$ . Построить графики найденных функций в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

2.

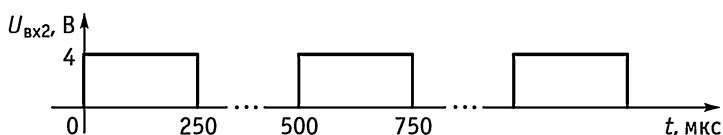


Рис. ПЗ.9

- Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.9).
- Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.
- Найти постоянную составляющую и амплитуду 3-й гармоники выходного напряжения.

3.

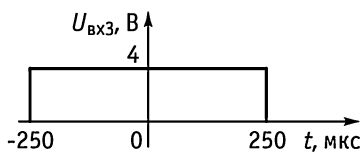


Рис. ПЗ.10

Используя заданное  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.8), найти  $U_{\text{вх3}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.10). Построить график  $|U_{\text{вх3}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Сравнить с  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ .

4.

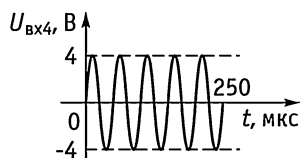


Рис. ПЗ.11

Используя  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$ , найти  $U_{\text{вх4}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.11). Качественно построить график  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Указать величину  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|_{\text{max}}$ .

5.

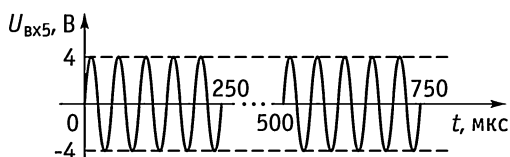


Рис. ПЗ.12

Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.12) в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

## ТЕСТ № 3

1.

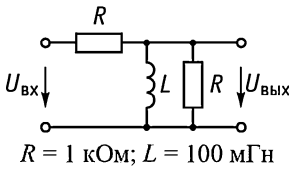
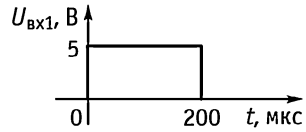


Рис. ПЗ.13



$$U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_n}{2} e^{-j\omega t_n/2}$$

Рис. ПЗ.14

Найти:  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ ,  $|H(j\omega)|$ ,  $|U_{\text{вых}}(j\omega)|$ . Построить графики найденных функций в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

2.

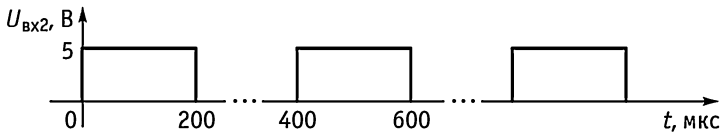


Рис. ПЗ.15

- Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.15).
- Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.
- Найти постоянную составляющую и амплитуду 1-й гармоники выходного напряжения.

3.

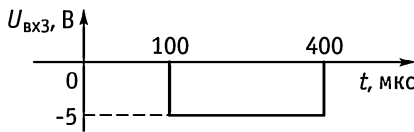


Рис. ПЗ.16

Используя заданное  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.14), найти  $U_{\text{вх3}}(j\omega)$  (Рис. ПЗ.16). Построить график  $|U_{\text{вх3}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Сравнить с  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ .

4.

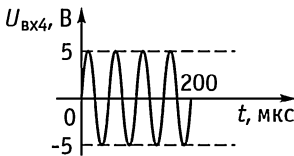


Рис. ПЗ.17

Используя  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$ , найти  $U_{\text{вх4}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.17). Качественно построить график  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Указать величину  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|_{\text{max}}$ .

5.

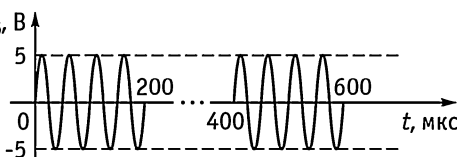


Рис. ПЗ.18

Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.18) в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

## ТЕСТ № 4

1.

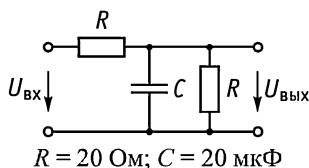
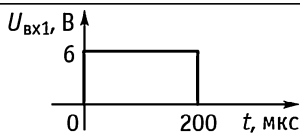


Рис. ПЗ.19



$$U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_m}{2} e^{-j\omega t_m/2}$$

Рис. ПЗ.20

Найти:  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ ,  $|H(j\omega)|$ ,  $|U_{\text{вых}}(j\omega)|$ . Построить графики найденных функций в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

2.

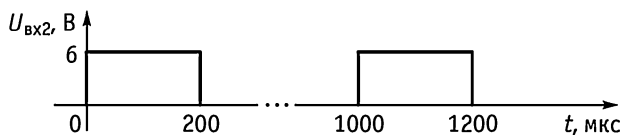


Рис. ПЗ.21

- а) Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.21).  
 б) Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.  
 в) Найти постоянную составляющую и амплитуду 4-й гармоники выходного напряжения.

3.

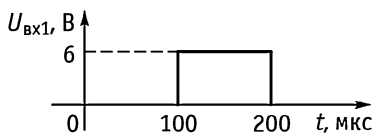


Рис. ПЗ.22

Используя заданное  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.20), найти  $U_{\text{вх3}}(j\omega)$  (Рис. ПЗ.22). Построить график  $|U_{\text{вх3}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Сравнить с  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ .

4.

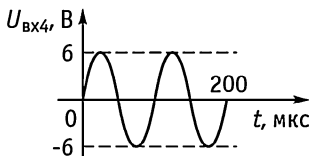


Рис. ПЗ.23

Используя  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$ , найти  $U_{\text{вх4}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.23). Качественно построить график  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Указать величину  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|_{\text{max}}$ .

5.

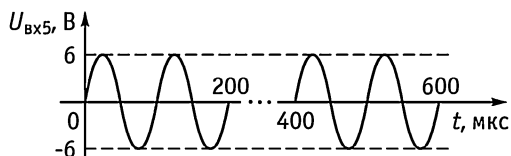


Рис. ПЗ.24

Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.24) в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

## ТЕСТ № 5

1.

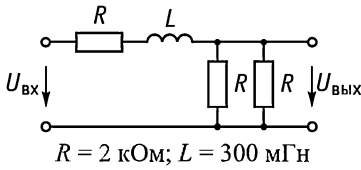
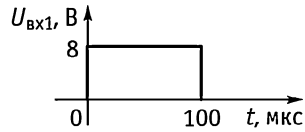


Рис. ПЗ.25



$$U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_n}{2} e^{-j\omega t_n/2}$$

Рис. ПЗ.26

Найти:  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ ,  $|H(j\omega)|$ ,  $|U_{\text{вых}}(j\omega)|$ . Построить графики найденных функций в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

2.

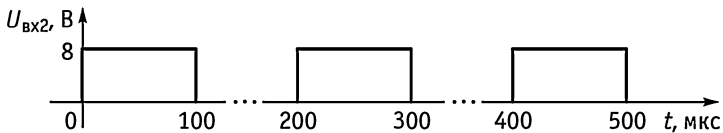


Рис. ПЗ.27

- Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.27).
- Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.
- Найти постоянную составляющую и амплитуду 3-й гармоники выходного напряжения.

3.

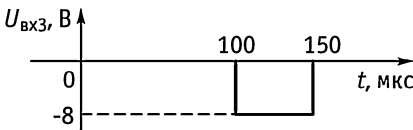


Рис. ПЗ.28

Используя заданное  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.26), найти  $U_{\text{вх3}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.28). Построить график  $|U_{\text{вх3}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Сравнить с  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ .

4.

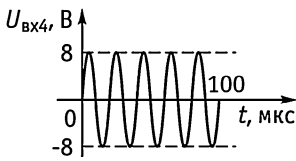


Рис. ПЗ.29

Используя  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$ , найти  $U_{\text{вх4}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.29). Качественно построить график  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Указать величину  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|_{\text{max}}$ .

5.

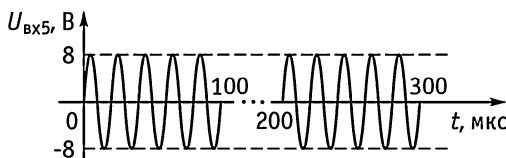


Рис. ПЗ.30

Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.30) в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

## ТЕСТ № 6

1.

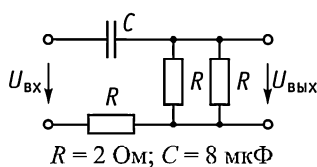
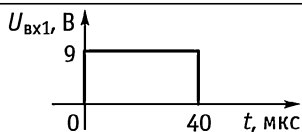


Рис. ПЗ.31



$$U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_m}{2} e^{-j\omega t_m/2}$$

Рис. ПЗ.32

Найти:  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ ,  $|H(j\omega)|$ ,  $|U_{\text{вых}}(j\omega)|$ . Построить графики найденных функций в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

2.

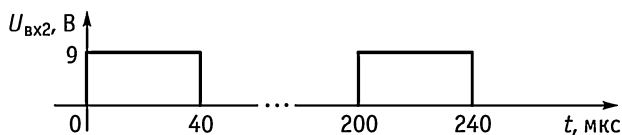


Рис. ПЗ.33

- а) Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.33).
- б) Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.
- в) Найти постоянную составляющую и амплитуду 4-й гармоники выходного напряжения.

3.

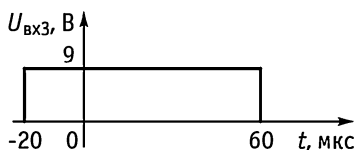


Рис. ПЗ.34

Используя заданное  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.32), найти  $U_{\text{вх3}}(j\omega)$  (Рис. ПЗ.34). Построить график  $|U_{\text{вх3}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Сравнить с  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ .

4.

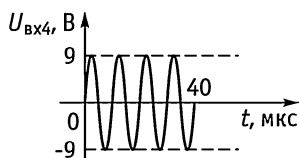


Рис. ПЗ.35

Используя  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$ , найти  $U_{\text{вх4}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.35). Качественно построить график  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Указать величину  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|_{\text{max}}$ .

5.

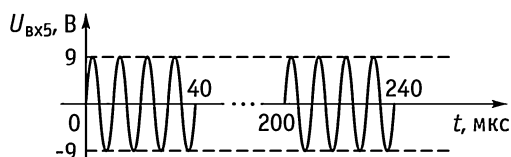
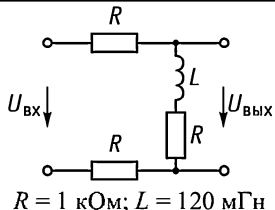
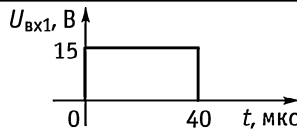
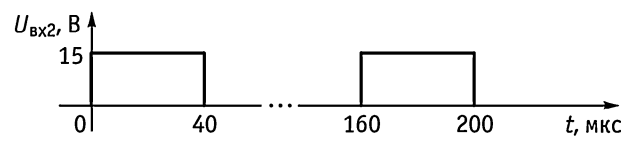
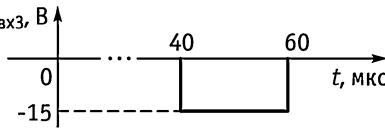
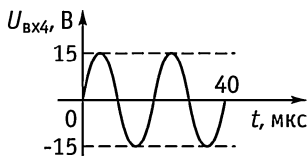
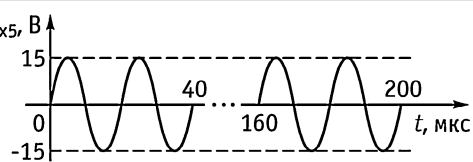


Рис. ПЗ.36

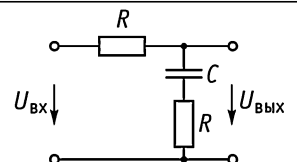
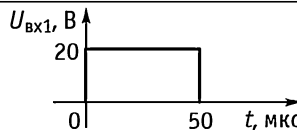

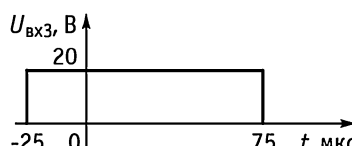
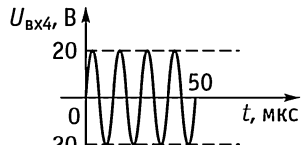
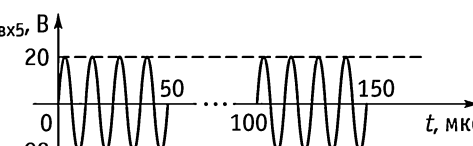
Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.36) в зависимости от частоты  $f$  в кГц.



## ТЕСТ № 7

<p>1.</p>  <p><math>R = 1 \text{ кОм}; L = 120 \text{ мГн}</math></p> <p>Рис. ПЗ.37</p>	 $U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_m}{2} e^{-j\omega t_m/2}$ <p>Рис. ПЗ.38</p>
<p>Найти: <math> U_{\text{вх1}}(j\omega) </math>, <math> H(j\omega) </math>, <math> U_{\text{вых}}(j\omega) </math>. Построить графики найденных функций в зависимости от частоты <math>f</math> в кГц.</p>	
<p>2.</p>  <p>Рис. ПЗ.39</p> <p>а) Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.39).          б) Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.          в) Найти постоянную составляющую и амплитуду 2-й гармоники выходного напряжения.</p>	
<p>3.</p>  <p>Рис. ПЗ.40</p>	<p>Используя заданное <math>U_{\text{вх1}}(j\omega)</math> (рис. ПЗ.38), найти <math>U_{\text{вх3}}(j\omega)</math> (рис. ПЗ.40). Построить график <math> U_{\text{вх3}}(j\omega) </math> в зависимости от частоты <math>f</math> в кГц. Сравнить с <math> U_{\text{вх1}}(j\omega) </math>.</p>
<p>4.</p>  <p>Рис. ПЗ.41</p>	<p>Используя <math>U_{\text{вх1}}(j\omega)</math>, найти <math>U_{\text{вх4}}(j\omega)</math> (рис. ПЗ.41). Качественно построить график <math> U_{\text{вх4}}(j\omega) </math> в зависимости от частоты <math>f</math> в кГц. Указать величину <math> U_{\text{вх4}}(j\omega) _{\text{max}}</math>.</p>
<p>5.</p>  <p>Рис. ПЗ.42</p>	<p>Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.42) в зависимости от частоты <math>f</math> в кГц.</p>

## ТЕСТ № 8

<p>1.</p>  <p><math>R = 2 \text{ Ом}; C = 25 \text{ мкФ}</math></p> <p>Рис. ПЗ.43</p>	 $U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_n}{2} e^{-j\omega t_n/2}$ <p>Рис. ПЗ.44</p> <p>Найти: <math> U_{\text{вх1}}(j\omega) </math>, <math> H(j\omega) </math>, <math> U_{\text{вых}}(j\omega) </math>. Построить графики найденных функций в зависимости от частоты <math>f</math> в кГц.</p>
<p>2.</p>  <p>Рис. ПЗ.45</p> <p>а) Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.45).          б) Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.          в) Найти постоянную составляющую и амплитуду 3-й гармоники выходного напряжения.</p>	
<p>3.</p>  <p>Рис. ПЗ.46</p>	<p>Используя заданное <math>U_{\text{вх1}}(j\omega)</math> (рис. ПЗ.44), найти <math>U_{\text{вх3}}(j\omega)</math> (Рис. ПЗ.46). Построить график <math> U_{\text{вх3}}(j\omega) </math> в зависимости от частоты <math>f</math> в кГц. Сравнить с <math> U_{\text{вх1}}(j\omega) </math>.</p>
<p>4.</p>  <p>Рис. ПЗ.47</p>	<p>Используя <math>U_{\text{вх1}}(j\omega)</math>, найти <math>U_{\text{вх4}}(j\omega)</math> (рис. ПЗ.47). Качественно построить график <math> U_{\text{вх4}}(j\omega) </math> в зависимости от частоты <math>f</math> в кГц. Указать величину <math> U_{\text{вх4}}(j\omega) _{\text{max}}</math>.</p>
<p>5.</p>  <p>Рис. ПЗ.48</p>	<p>Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.48) в зависимости от частоты <math>f</math> в кГц.</p>

## ТЕСТ № 9

1.

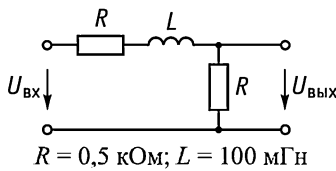
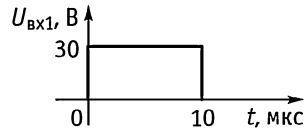


Рис. ПЗ.49



$$U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_m}{2} e^{-j\omega t_m/2}$$

Рис. ПЗ.50

Найти:  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ ,  $|H(j\omega)|$ ,  $|U_{\text{вых}}(j\omega)|$ . Построить графики найденных функций в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

2.

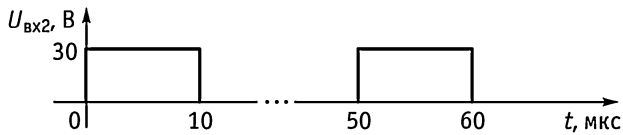


Рис. ПЗ.51

- Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.51).
- Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.
- Найти постоянную составляющую и амплитуду 2-й гармоники выходного напряжения.

3.

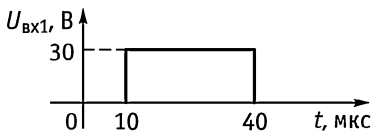


Рис. ПЗ.52

Используя заданное  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.50), найти  $U_{\text{вх3}}(j\omega)$  (Рис. ПЗ.52). Построить график  $|U_{\text{вх3}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Сравнить с  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ .

4.

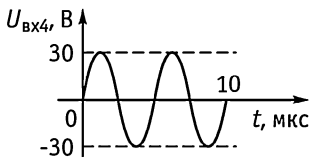


Рис. ПЗ.53

Используя  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$ , найти  $U_{\text{вх4}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.53). Качественно построить график  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Указать величину  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|_{\text{max}}$ .

5.

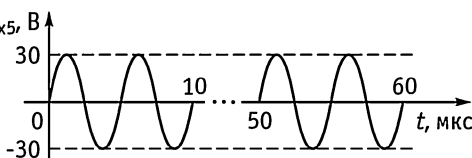


Рис. ПЗ.54

Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.54) в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

## ТЕСТ № 10

1.

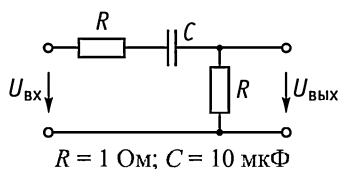
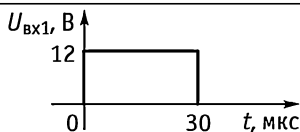


Рис. ПЗ.55



$$U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_n}{2} e^{-j\omega t_n/2}$$

Рис. ПЗ.56

Найти:  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ ,  $|H(j\omega)|$ ,  $|U_{\text{вых}}(j\omega)|$ . Построить графики найденных функций в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

2.

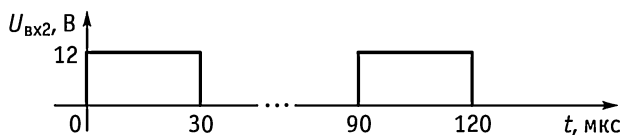


Рис. ПЗ.57

- а) Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.57).  
 б) Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.  
 в) Найти постоянную составляющую и амплитуду 4-й гармоники выходного напряжения.

3.

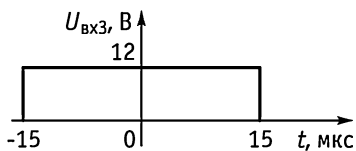


Рис. ПЗ.58

Используя заданное  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.56), найти  $U_{\text{вх3}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.58). Построить график  $|U_{\text{вх3}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Сравнить с  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ .

4.

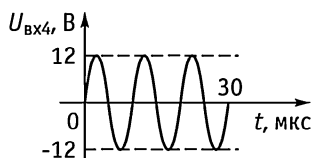


Рис. ПЗ.59

Используя  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$ , найти  $U_{\text{вх4}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.59). Качественно построить график  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Указать величину  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|_{\text{max}}$ .

5.

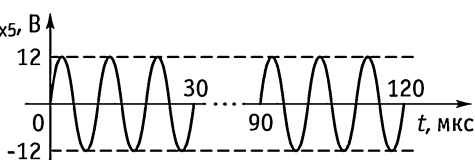
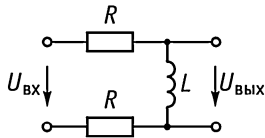


Рис. ПЗ.60

Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.60) в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

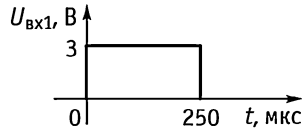
## ТЕСТ № 11

1.



$$R = 0,2 \text{ кОм}; L = 100 \text{ мГн}$$

Рис. ПЗ.61



$$U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_{\text{п}}}{2} e^{-j\omega t_{\text{н}}/2}$$

Рис. ПЗ.62

Найти:  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ ,  $|H(j\omega)|$ ,  $|U_{\text{вых}}(j\omega)|$ . Построить графики найденных функций в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

2.

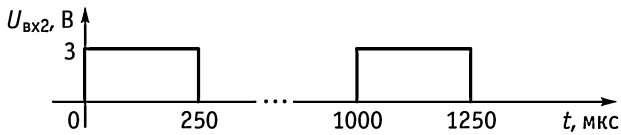


Рис. ПЗ.63

- Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.63).
- Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.
- Найти постоянную составляющую и амплитуду 2-й гармоники выходного напряжения.

3.

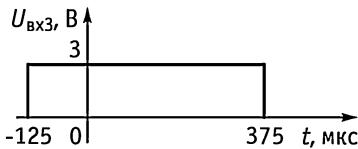


Рис. ПЗ.64

Используя заданное  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.62), найти  $U_{\text{вх3}}(j\omega)$  (Рис. ПЗ.64). Построить график  $|U_{\text{вх3}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Сравнить с  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ .

4.

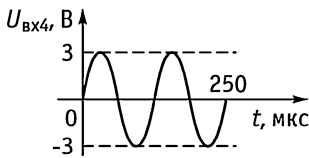


Рис. ПЗ.65

Используя  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$ , найти  $U_{\text{вх4}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.65). Качественно построить график  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Указать величину  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|_{\text{max}}$ .

5.

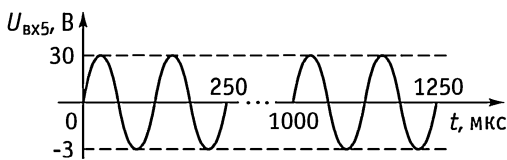


Рис. ПЗ.66

Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.66) в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

## ТЕСТ № 12

1.

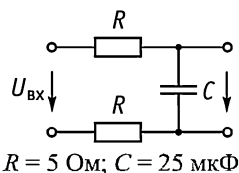
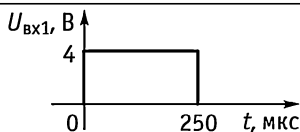


Рис. ПЗ.67



$$U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_n}{2} e^{-j\omega t_n/2}$$

Рис. ПЗ.68

Найти:  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ ,  $|H(j\omega)|$ ,  $|U_{\text{вых}}(j\omega)|$ . Построить графики найденных функций в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

2.

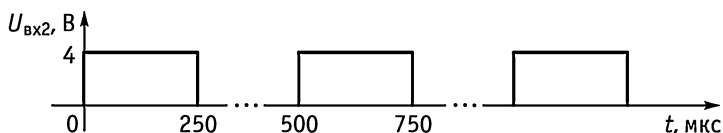


Рис. ПЗ.69

- Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.69).
- Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.
- Найти постоянную составляющую и амплитуду 3-й гармоники выходного напряжения.

3.

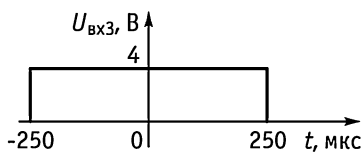


Рис. ПЗ.70

Используя заданное  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.68), найти  $U_{\text{вх3}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.70). Построить график  $|U_{\text{вх3}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Сравнить с  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ .

4.

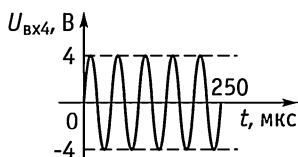


Рис. ПЗ.71

Используя  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$ , найти  $U_{\text{вх4}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.71). Качественно построить график  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Указать величину  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|_{\text{max}}$ .

5.

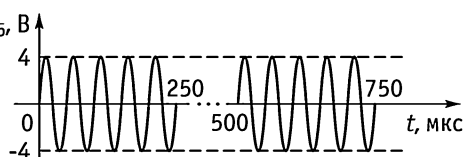


Рис. ПЗ.72

Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.72) в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

## ТЕСТ № 13

1.

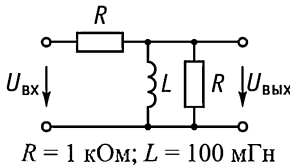
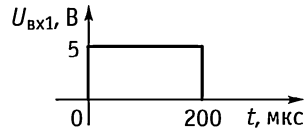


Рис. ПЗ.73



$$U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_m}{2} e^{-j\omega t_m/2}$$

Рис. ПЗ.74

Найти:  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ ,  $|H(j\omega)|$ ,  $|U_{\text{вых}}(j\omega)|$ . Построить графики найденных функций в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

2.

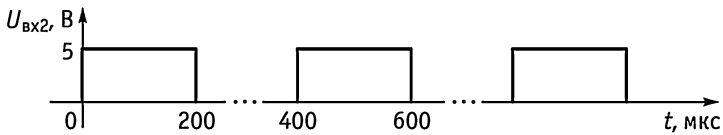


Рис. ПЗ.75

- Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.75).
- Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.
- Найти постоянную составляющую и амплитуду 1-й гармоники выходного напряжения.

3.

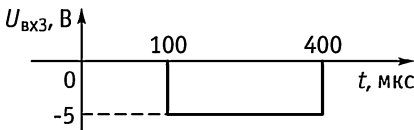


Рис. ПЗ.76

Используя заданное  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.74), найти  $U_{\text{вх3}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.76). Построить график  $|U_{\text{вх3}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Сравнить с  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ .

4.

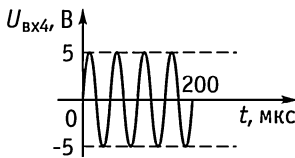


Рис. ПЗ.77

Используя  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$ , найти  $U_{\text{вх4}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.77). Качественно построить график  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Указать величину  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|_{\text{max}}$ .

5.

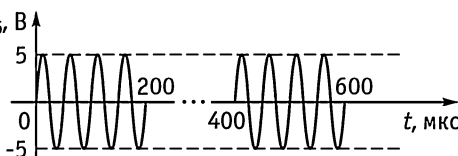
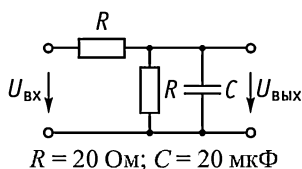


Рис. ПЗ.78

Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.78) в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

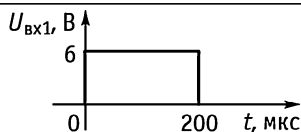
## ТЕСТ № 14

1.



$$R = 20 \text{ Ом}; C = 20 \text{ мкФ}$$

Рис. ПЗ.79



$$U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_m}{2} e^{-j\omega t_m/2}$$

Рис. ПЗ.80

Найти:  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ ,  $|H(j\omega)|$ ,  $|U_{\text{вых}}(j\omega)|$ . Построить графики найденных функций в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

2.

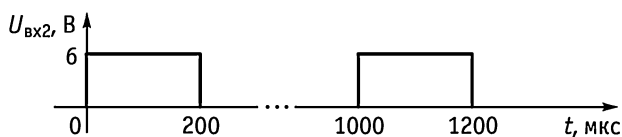


Рис. ПЗ.81

- Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.81).
- Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.
- Найти постоянную составляющую и амплитуду 4-й гармоники выходного напряжения.

3.

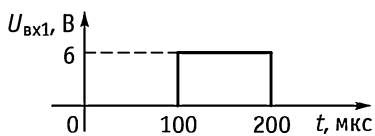


Рис. ПЗ.82

Используя заданное  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.80), найти  $U_{\text{вх3}}(j\omega)$  (Рис. ПЗ.82). Построить график  $|U_{\text{вх3}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Сравнить с  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ .

4.

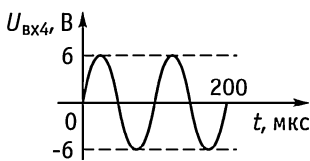


Рис. ПЗ.83

Используя  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$ , найти  $U_{\text{вх4}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.83). Качественно построить график  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Указать величину  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|_{\text{max}}$ .

5.

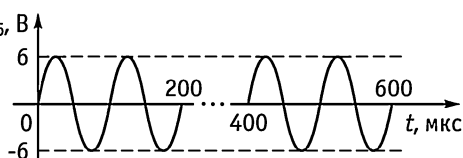


Рис. ПЗ.84

Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.84) в зависимости от частоты  $f$  в кГц.



## ТЕСТ № 15

1.

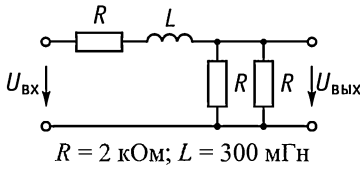
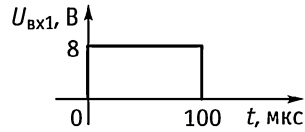


Рис. ПЗ.85



$$U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_m}{2} e^{-j\omega t_m/2}$$

Рис. ПЗ.86

Найти:  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ ,  $|H(j\omega)|$ ,  $|U_{\text{вых}}(j\omega)|$ . Построить графики найденных функций в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

2.

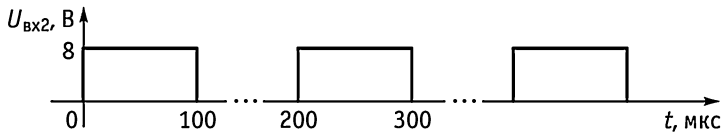


Рис. ПЗ.87

- Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.87).
- Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.
- Найти постоянную составляющую и амплитуду 3-й гармоники выходного напряжения.

3.

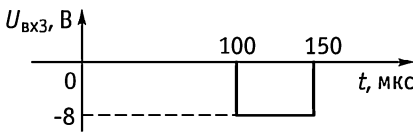


Рис. ПЗ.88

Используя заданное  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.86), найти  $U_{\text{вх3}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.88). Построить график  $|U_{\text{вх3}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Сравнить с  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ .

4.

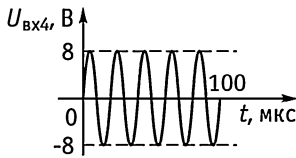


Рис. ПЗ.89

Используя  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$ , найти  $U_{\text{вх4}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.89). Качественно построить график  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Указать величину  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|_{\text{max}}$ .

5.

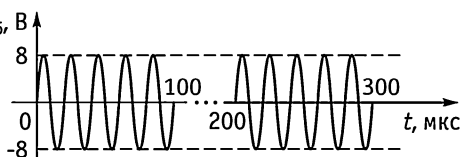


Рис. ПЗ.90

Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.90) в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

## ТЕСТ № 16

1.

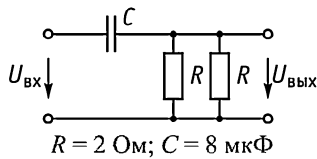
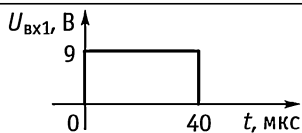


Рис. ПЗ.91



$$U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_{\text{и}}}{2} e^{-j\omega t_{\text{и}}/2}$$

Рис. ПЗ.92

Найти:  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ ,  $|H(j\omega)|$ ,  $|U_{\text{вых}}(j\omega)|$ . Построить графики найденных функций в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

2.

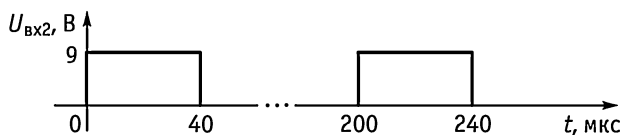


Рис. ПЗ.93

- Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.93).
- Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.
- Найти постоянную составляющую и амплитуду 4-й гармоники выходного напряжения.

3.



Рис. ПЗ.94

Используя заданное  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.92), найти  $U_{\text{вх3}}(j\omega)$  (Рис. ПЗ.94). Построить график  $|U_{\text{вх3}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Сравнить с  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ .

4.

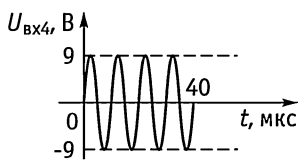


Рис. ПЗ.95

Используя  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$ , найти  $U_{\text{вх4}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.95). Качественно построить график  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Указать величину  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|_{\text{max}}$ .

5.

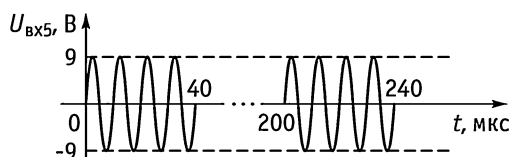
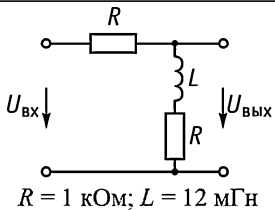
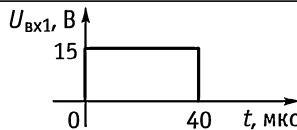
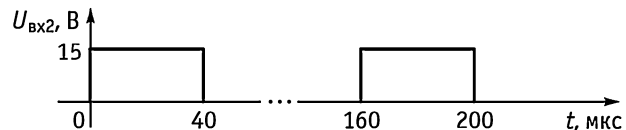
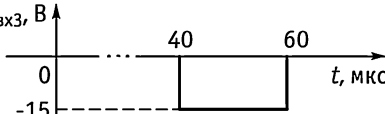
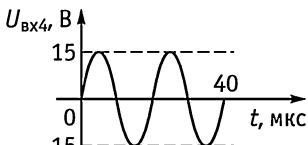
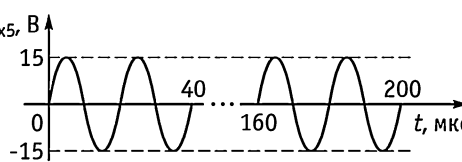


Рис. ПЗ.96

Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.96) в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

## ТЕСТ № 17

<p>1.</p>  <p><math>R = 1 \text{ кОм}; L = 12 \text{ мГн}</math></p> <p>Рис. ПЗ.97</p>	 $U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_m}{2} e^{-j\omega t_m/2}$ <p>Рис. ПЗ.98</p>
<p>Найти: <math> U_{\text{вх1}}(j\omega) </math>, <math> H(j\omega) </math>, <math> U_{\text{вых}}(j\omega) </math>. Построить графики найденных функций в зависимости от частоты <math>f</math> в кГц.</p>	
<p>2.</p>  <p>Рис. ПЗ.99</p> <p>а) Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.99).          б) Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.          в) Найти постоянную составляющую и амплитуду 2-й гармоники выходного напряжения.</p>	
<p>3.</p>  <p>Рис. ПЗ.100</p>	<p>Используя заданное <math>U_{\text{вх1}}(j\omega)</math> (рис. ПЗ.98), найти <math>U_{\text{вх3}}(j\omega)</math> (рис. ПЗ.100). Построить график <math> U_{\text{вх3}}(j\omega) </math> в зависимости от частоты <math>f</math> в кГц. Сравнить с <math> U_{\text{вх1}}(j\omega) </math>.</p>
<p>4.</p>  <p>Рис. ПЗ.101</p>	<p>Используя <math>U_{\text{вх1}}(j\omega)</math>, найти <math>U_{\text{вх4}}(j\omega)</math> (рис. ПЗ.101). Качественно построить график <math> U_{\text{вх4}}(j\omega) </math> в зависимости от частоты <math>f</math> в кГц. Указать величину <math> U_{\text{вх4}}(j\omega) _{\text{max}}</math>.</p>
<p>5.</p>  <p>Рис. ПЗ.102</p>	<p>Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.102) в зависимости от частоты <math>f</math> в кГц.</p>

## ТЕСТ № 18

1.

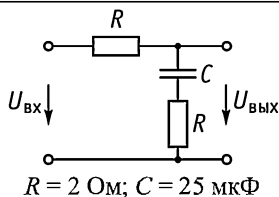
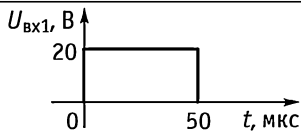


Рис. ПЗ.103



$$U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_n}{2} e^{-j\omega t_n/2}$$

Рис. ПЗ.104

Найти:  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ ,  $|H(j\omega)|$ ,  $|U_{\text{вых}}(j\omega)|$ . Построить графики найденных функций в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

2.

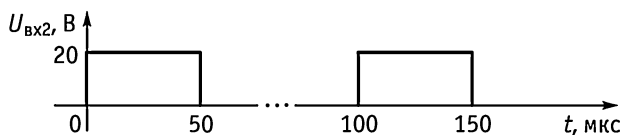


Рис. ПЗ.105

- Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.105).
- Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.
- Найти постоянную составляющую и амплитуду 3-й гармоники выходного напряжения.

3.

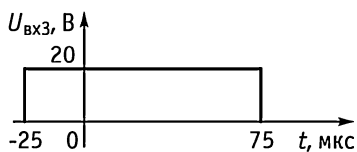


Рис. ПЗ.106

Используя заданное  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.104), найти  $U_{\text{вх3}}(j\omega)$  (Рис. ПЗ.106). Построить график  $|U_{\text{вх3}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Сравнить с  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ .

4.

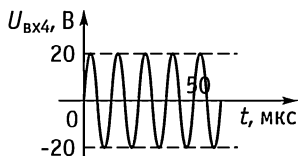


Рис. ПЗ.107

Используя  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$ , найти  $U_{\text{вх4}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.107). Качественно построить график  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Указать величину  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|_{\text{max}}$ .

5.

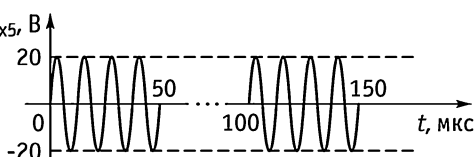
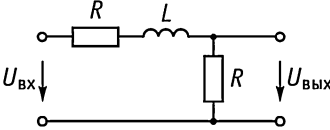
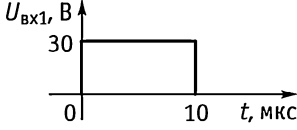
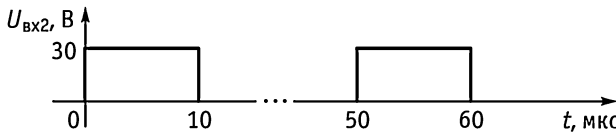
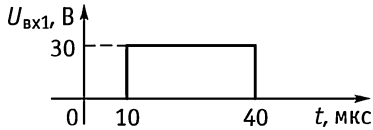
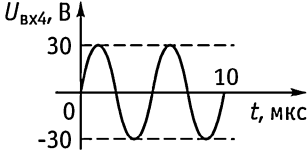
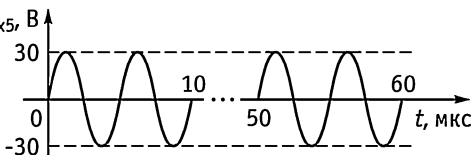


Рис. ПЗ.108

Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.108) в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

## ТЕСТ № 19

<p>1.</p>  <p><math>R = 0,5 \text{ кОм}; L = 100 \text{ мГн}</math></p> <p>Рис. ПЗ.109</p>	 $U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_{\text{п}}}{2} e^{-j\omega t_{\text{п}}/2}$ <p>Рис. ПЗ.110</p> <p>Найти: <math> U_{\text{вх1}}(j\omega) </math>, <math> H(j\omega) </math>, <math> U_{\text{вых}}(j\omega) </math>. Построить графики найденных функций в зависимости от частоты <math>f</math> в кГц.</p>
<p>2.</p>  <p>Рис. ПЗ.111</p> <p>а) Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.111).          б) Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.          в) Найти постоянную составляющую и амплитуду 2-й гармоники выходного напряжения.</p>	
<p>3.</p>  <p>Рис. ПЗ.112</p>	<p>Используя заданное <math>U_{\text{вх1}}(j\omega)</math> (рис. ПЗ.110), найти <math>U_{\text{вх3}}(j\omega)</math> (Рис. ПЗ.112). Построить график <math> U_{\text{вх3}}(j\omega) </math> в зависимости от частоты <math>f</math> в кГц. Сравнить с <math> U_{\text{вх1}}(j\omega) </math>.</p>
<p>4.</p>  <p>Рис. ПЗ.113</p>	<p>Используя <math>U_{\text{вх1}}(j\omega)</math>, найти <math>U_{\text{вх4}}(j\omega)</math> (рис. ПЗ.113). Качественно построить график <math> U_{\text{вх4}}(j\omega) </math> в зависимости от частоты <math>f</math> в кГц. Указать величину <math> U_{\text{вх4}}(j\omega) _{\text{max}}</math>.</p>
<p>5.</p>  <p>Рис. ПЗ.114</p>	<p>Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.114) в зависимости от частоты <math>f</math> в кГц.</p>

## ТЕСТ № 20

1.

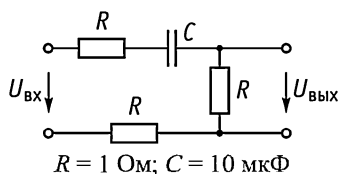
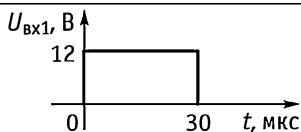


Рис. ПЗ.115



$$U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_n}{2} e^{-j\omega t_n/2}$$

Рис. ПЗ.116

Найти:  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ ,  $|H(j\omega)|$ ,  $|U_{\text{вых}}(j\omega)|$ . Построить графики найденных функций в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

2.

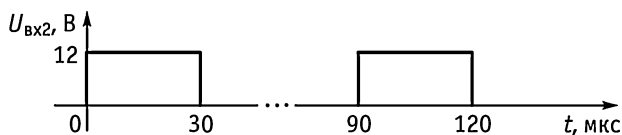


Рис. ПЗ.117

- Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.117).
- Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.
- Найти постоянную составляющую и амплитуду 4-й гармоники выходного напряжения.

3.

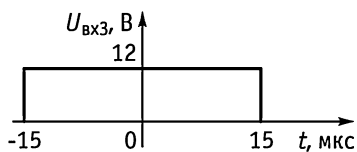


Рис. ПЗ.118

Используя заданное  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.116), найти  $U_{\text{вх3}}(j\omega)$  (Рис. ПЗ.118). Построить график  $|U_{\text{вх3}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Сравнить с  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ .

4.

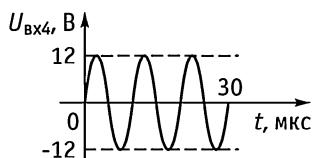


Рис. ПЗ.119

Используя  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$ , найти  $U_{\text{вх4}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.119). Качественно построить график  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Указать величину  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|_{\text{max}}$ .

5.

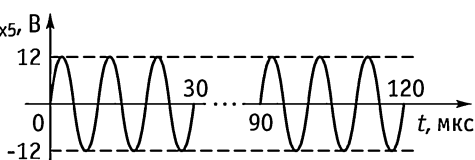


Рис. ПЗ.120

Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.120) в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

## ТЕСТ № 21

1.

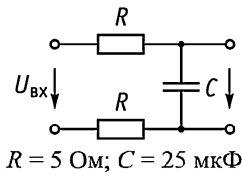
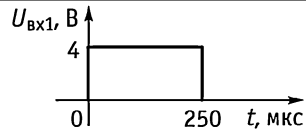


Рис. ПЗ.121



$$U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_m}{2} e^{-j\omega t_m/2}$$

Рис. ПЗ.122

Найти:  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ ,  $|H(j\omega)|$ ,  $|U_{\text{вых}}(j\omega)|$ . Построить графики найденных функций в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

2.

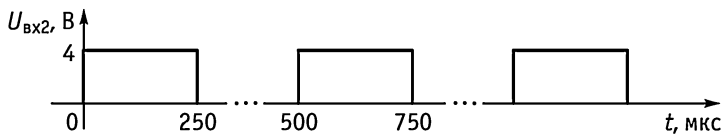


Рис. ПЗ.123

- Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.123).
- Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.
- Найти постоянную составляющую и амплитуду 3-й гармоники выходного напряжения.

3.

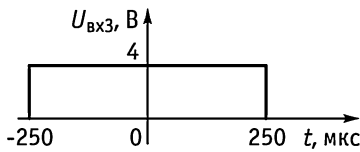


Рис. ПЗ.124

Используя заданное  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.122), найти  $U_{\text{вх3}}(j\omega)$  (Рис. ПЗ.124). Построить график  $|U_{\text{вх3}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Сравнить с  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ .

4.

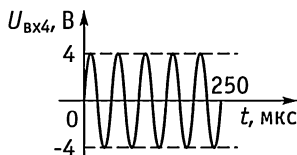


Рис. ПЗ.125

Используя  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$ , найти  $U_{\text{вх4}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.125). Качественно построить график  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Указать величину  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|_{\text{max}}$ .

5.

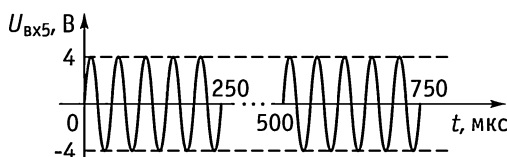
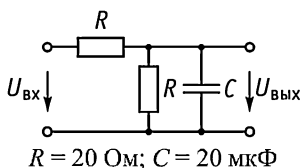


Рис. ПЗ.126

Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.126) в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

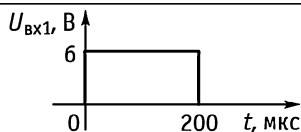
## ТЕСТ № 22

1.



$$R = 20 \text{ Ом}; C = 20 \text{ мкФ}$$

Рис. ПЗ.127



$$U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_m}{2} e^{-j\omega t_m/2}$$

Рис. ПЗ.128

Найти:  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ ,  $|H(j\omega)|$ ,  $|U_{\text{вых}}(j\omega)|$ . Построить графики найденных функций в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

2.

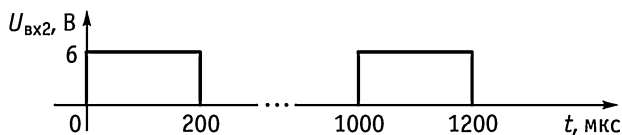


Рис. ПЗ.129

- а) Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.129).  
 б) Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.  
 в) Найти постоянную составляющую и амплитуду 4-й гармоники выходного напряжения.

3.

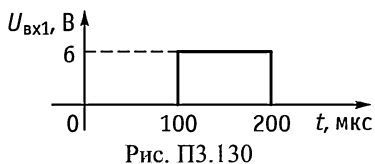


Рис. ПЗ.130

Используя заданное  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.128), найти  $U_{\text{вх3}}(j\omega)$  (Рис. ПЗ.130). Построить график  $|U_{\text{вх3}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Сравнить с  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ .

4.

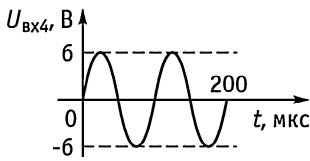


Рис. ПЗ.131

Используя  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$ , найти  $U_{\text{вх4}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.131). Качественно построить график  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Указать величину  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|_{\text{max}}$ .

5.

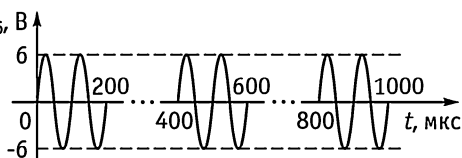


Рис. ПЗ.132

Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.132) в зависимости от частоты  $f$  в кГц.



## ТЕСТ № 23

1.

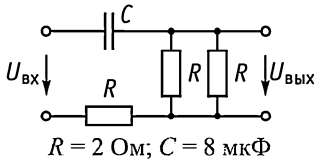
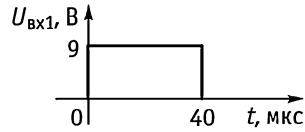


Рис. ПЗ.133



$$U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_H}{2} e^{-j\omega t_H/2}$$

Рис. ПЗ.134

Найти:  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ ,  $|H(j\omega)|$ ,  $|U_{\text{вых}}(j\omega)|$ . Построить графики найденных функций в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

2.

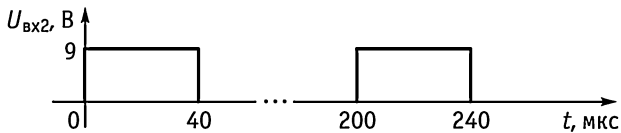


Рис. ПЗ.135

- Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.135).
- Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.
- Найти постоянную составляющую и амплитуду 4-й гармоники выходного напряжения.

3.

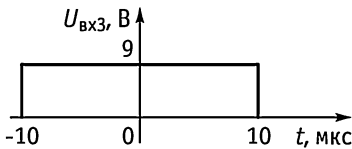


Рис. ПЗ.136

Используя заданное  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.134), найти  $U_{\text{вх3}}(j\omega)$  (Рис. ПЗ.136). Построить график  $|U_{\text{вх3}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Сравнить с  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ .

4.

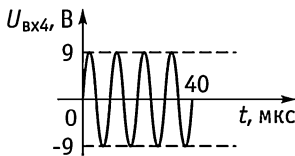


Рис. ПЗ.137

Используя  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$ , найти  $U_{\text{вх4}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.137). Качественно построить график  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Указать величину  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|_{\text{max}}$ .

5.

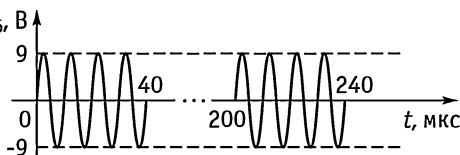


Рис. ПЗ.138

Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.138) в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

## ТЕСТ № 24

1.

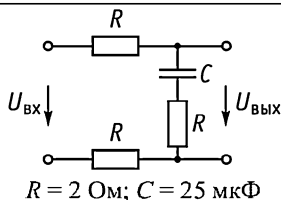
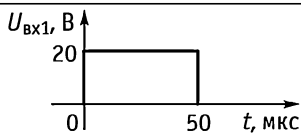


Рис. ПЗ.139



$$U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_m}{2} e^{-j\omega t_m/2}$$

Рис. ПЗ.140

Найти:  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ ,  $|H(j\omega)|$ ,  $|U_{\text{вых}}(j\omega)|$ . Построить графики найденных функций в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

2.

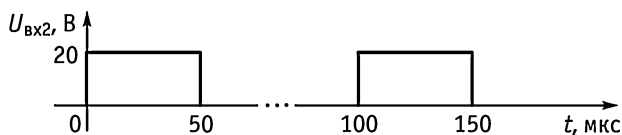


Рис. ПЗ.141

- Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.141).
- Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.
- Найти постоянную составляющую и амплитуду 3-й гармоники выходного напряжения.

3.

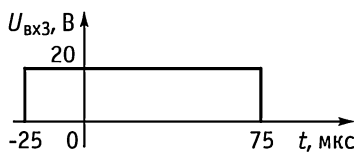


Рис. ПЗ.142

Используя заданное  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.140), найти  $U_{\text{вх3}}(j\omega)$  (Рис. ПЗ.142). Построить график  $|U_{\text{вх3}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Сравнить с  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ .

4.

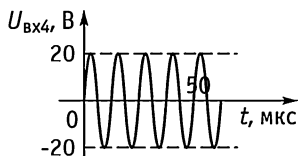


Рис. ПЗ.143

Используя  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$ , найти  $U_{\text{вх4}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.143). Качественно построить график  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Указать величину  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|_{\text{max}}$ .

5.

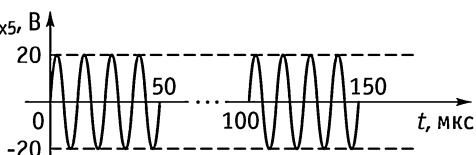


Рис. ПЗ.144

Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.144) в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

## ТЕСТ № 25

1.

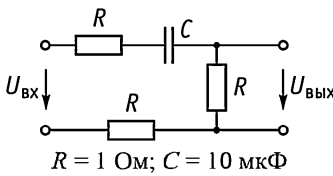
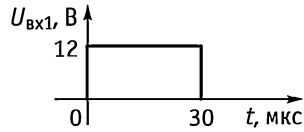


Рис. ПЗ.145



$$U_{\text{вх1}}(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_m}{2} e^{-j\omega t_m/2}$$

Рис. ПЗ.146

Найти:  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ ,  $|H(j\omega)|$ ,  $|U_{\text{вых}}(j\omega)|$ . Построить графики найденных функций в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

2.

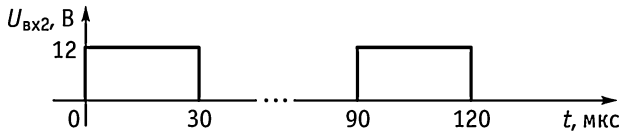


Рис. ПЗ.147

- Используя связь между спектрами периодического и непериодического сигналов, найти и построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.147).
- Определить частоты и амплитуды гармонических составляющих, ограничившись 5-й гармоникой.
- Найти постоянную составляющую и амплитуду 4-й гармоники выходного напряжения.

3.

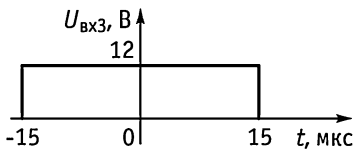


Рис. ПЗ.148

Используя заданное  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.146), найти  $U_{\text{вх3}}(j\omega)$  (Рис. ПЗ.148). Построить график  $|U_{\text{вх3}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Сравнить с  $|U_{\text{вх1}}(j\omega)|$ .

4.

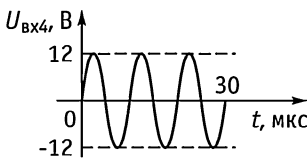


Рис. ПЗ.149

Используя  $U_{\text{вх1}}(j\omega)$ , найти  $U_{\text{вх4}}(j\omega)$  (рис. ПЗ.149). Качественно построить график  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|$  в зависимости от частоты  $f$  в кГц. Указать величину  $|U_{\text{вх4}}(j\omega)|_{\text{max}}$ .

5.

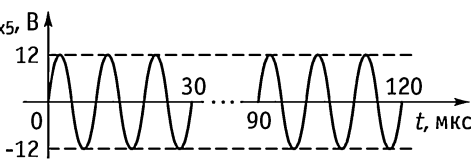


Рис. ПЗ.150

Качественно построить спектр амплитуд входного сигнала (рис. ПЗ.150) в зависимости от частоты  $f$  в кГц.

## Литература

1. В.П. Бакалов, В.Ф. Дмитриков, Б.И. Крук Основы теории цепей: Учебник для вузов. – М.: Горячая линия-Телеком, 2009. – 596 с.
2. Б.И. Крук, В.Н. Попантонопуло, В.П. Шувалов Телекоммуникационные системы и сети. Т. 1: Учеб. пособие. – М.: Горячая линия-Телеком, 2012. – 620 с.
3. Б.И. Крук, Г.Н. Попов ... И мир загадочный за занавесом цифр: Цифровая связь. – М.: Горячая линия-Телеком, 2004. – 260 с.
4. В.П. Бакалов, О.Б. Журавлева, Б.И. Крук Основы анализа цепей: Учеб. пособие для вузов. – Москва: Горячая линия –Телском, Радио и связь, 2007. – 591 с.
5. О.Б. Журавлева, Б.И. Крук Дискретные сигналы и цепи: 26 вопросов и ответов: Учеб. пособие для дистанционного обучения. – Новосибирск: СибГУТИ, 1999. – 100 с.
6. С.И. Баскаков Радиотехнические цепи и сигналы: Руководство к решению задач. – М.: Высшая школа, 2002. – 214 с.

## Оглавление

Введение .....	3
1. Физические основы спектрального анализа .....	4
2. Спектральный анализ периодических сигналов .....	31
3. Спектральный анализ непериодических сигналов .....	61
4. Спектральный анализ дискретных сигналов .....	86
5. Спектральный анализ модулированных сигналов .....	98
Приложение 1. Задачи на тему «Основы спектрального анализа» с решениями .....	110
Приложение 2. Задачи на тему «Основы спектрального анализа» для самостоятельного решения .....	120
Приложение 3. Тестовые задания по теме «Основы спектрального анализа» .....	122
Литература .....	147